Test technique n°3
Développements limités, topologie des matrices

MP Spéciale INP-HB — L. Tintinaglia

6 questions, 40 minutes. Une attention particulière dans la notation sera apportée à la **propreté des copies** (1 point / 20). Veuillez traiter les questions dans l'ordre. La calculatrice est interdite.

1. (3 points) Donner avec démonstration le développement limité en 0 à l'ordre 5 de tan.
2. (2 points) Donner avec démonstration le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. (2 points) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{ax} - 2}{x^2}$ admette une limite finie en 0. Déterminer alors la limite.
4. (2.5 points) Donner avec démonstration le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 3 de $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$.
5. (3 points) Equivalent en 0^+ de $\tan(x)^{\sin(x)} - \sin(x)^{\tan(x)}$ de la forme $\alpha x^\beta \ln(x)^\gamma$.
6. (a) (3 points) Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) (3.5 points) Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Test technique n°3
Développements limités, topologie des matrices

MP Spéciale INP-HB — L. Tintinaglia

5 questions, 40 minutes. Une attention particulière dans la notation sera apportée à la **propreté des copies**. Veuillez traiter les questions dans l'ordre. La calculatrice est interdite.

1. (2.5 points) Donner avec démonstration le développement limité en 0 à l'ordre 5 de tan.
2. (2.5 points) Donner avec démonstration le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. (3 points) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{ax} - 2}{x^2}$ admette une limite finie en 0. Déterminer alors la limite.
4. (3.5 points) Donner avec démonstration le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 3 de $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$.
5. (a) (4 points) Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) (4.5 points) Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.