

Test technique n°2
Développements limités, suites récurrentes, réduction

MP Spéciale INP-HB — L. TINTINAGLIA

6 questions, 40 minutes. Une attention particulière dans la notation sera apportée à la **proprété des copies**. Veuillez traiter les questions dans l'ordre. La calculatrice est interdite.

1. (2 points) Soient $a, b > 0$. Limite en 0 de :

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

2. (2 points) Limite en 0 de :

$$\frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x}$$

3. (2 points) Développement à l'ordre 4 en $+\infty$ de $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \ln x$.
4. (2 points) Asymptote en $+\infty$ de $x \mapsto x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$.
5. (2 points) On définit la suite (u_n) par récurrence :

$$u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

- (a) (1 point) Montrer que (u_n) converge vers 0.
(b) (2 points) Montrer que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

- (c) (3,5 points) Montrer que

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10n\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

6. (3,5 points) Diagonaliser

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$