

Interrogation 2 - Algèbre linéaire et réduction

L. TINTINAGLIA

Cette interrogation contient **3 parties indépendantes**. Les questions doivent être traitées dans l'ordre. Si le candidat saute une question, il le signale sur sa copie.

Les questions 13 et 14 sont à traiter seulement si le reste a déjà été traité.

I) Réduction pratique et calcul matriciel

Dans cette partie, on considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle inversible ? Donner son inverse le cas échéant.
2. Donner les éléments propres de A . Montrer que A est diagonalisable.
3. Donner le rang et le déterminant de A .
4. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -v_n \\ v_{n+1} &= -u_n + 2w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

A quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) ces trois suites sont-elles convergentes ?

II) Réduction et commutativité

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5. *Codiagonalisation*. Considérons $u, v \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisables et qui commutent. Montrer que u et v sont codiagonalisables, c'est-à-dire qu'ils admettent une base commune de vecteurs propres.
6. *Spectre du commuté*. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On admet que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - (a) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
 - (b) Comparer $\text{Sp}(AB)$ et $\text{Sp}(BA)$. Les matrices AB et BA sont-elles semblables ? Discuter.
7. *Décomposition de DUNFORD*. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $\delta \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $\nu \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $u = \delta + \nu$ et $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$. On ne demande pas de montrer l'unicité.

8. *Intersection de spectres.* Considérons $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, et $\varphi_{A,B} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto AM - MB \end{cases}$.
- (a) On suppose que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$. Montrer que $\varphi_{A,B}$ est bijective. *On pourra montrer en premier lieu que $\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.*
- (b) On suppose que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$. Montrer que $\varphi_{A,B}$ n'est pas bijective.

III) Matrice de VANDERMONDE et matrices compagnons

Pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit la matrice de VANDERMONDE :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

9. *Déterminant.* Montrer par la méthode de votre choix que :

$$\det(V(a_1, \dots, a_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

10. *Caractérisation des nilpotents.* Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente *si et seulement si* pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(A^k) = 0$.

Dans la suite, soit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle matrice compagnon associée

$$\text{à } P : C_P = \begin{pmatrix} 0 & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 \\ (0) & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

11. Montrer que $\chi_{C_P} = P$.
12. On suppose uniquement dans cette question $P \in \mathbb{Z}[X]$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines complexes de P . Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j^k \in \mathbb{Z}$.
13. On suppose maintenant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distincts. Montrer que

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) C_P V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

14. *Endomorphismes cycliques.* Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
- $\triangleleft A$ est semblable à une matrice compagnon ;
 - $\triangleleft \pi_A = \chi_A$;
 - $\triangleleft$ Il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$.