Interrogation 1 - Séries numériques et intégrale généralisée

L. Tintinaglia

Cette interrogation est constitué de **deux exercices indépendants**. Comme toujours, **la qualité des raisonnements et des calculs sera préférée à la quantité.**

I) Exercice 1 - séries

Séries de Bertrand

1. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge *si et seulement si* $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.
2. *Application* : étudier la série de terme général $\frac{1}{\ln(n!)}$.

Théorème de Cesàro

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = \ell \right)$$

4. Montrer que la réciproque de la question précédente n'est pas toujours vérifiée.

Développements asymptotiques

On note $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les sommes partielles harmoniques :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

5. Montrer que la série harmonique (*id est* la série de terme général H_n) diverge.
6. Montrer qu'il existe $\gamma > 0$, $H_n = \ln n + \gamma + o_{n \to +\infty}(1)$
7. Démontrer que pour $\alpha > 1$, $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1) n^{\alpha - 1}}$ On admet dans la suite de l'exercice que pour $\alpha < 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1 - \alpha}$

8. Donner un développement asymptotique en $o\left(\frac{1}{n}\right)$ de H_n.

Nous allons ensuite étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} & = \ln(1+u_n) = f(u_n) \end{cases} \quad \text{où } f \ : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{cases}$$

9. Montrer que (u_n) est monotone, puis que $u_n \to 0$.
10. Montrer que $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}u_n + o(u_n)$
11. Donner un équivalent de (u_n).
12. Montrer que : $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

II) Exercice 2 - intégrales généralisées

Généralités

13. Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver une fonction f continue par morceaux de $[a\,, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge mais $f(x)$ ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$.
14. Rappeler le théorème de changement de variables pour une intégrale généralisée.

Intégrabilité et convergence

15. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.
16. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
17. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$.
18. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\mathrm{d}x$, en admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
19. Montrer que : $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^3 + x^2 - x} = \frac{\ln 5}{2} - \frac{5\ln 3}{4} + \frac{3\ln 2}{4} + \frac{\operatorname{Arctan}(2)}{2} - \frac{\operatorname{Arctan}(3)}{2}$

Une suite d'intégrales (*BONUS, à ne traiter seulement si le reste est fini*)

20. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, calculer

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p\,\mathrm{d}x$$

Toute initiative ou solution partielle sera prise en compte.