CONCOURS D'ADMISSION 2025

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_Session 2_Printemps

Concours blanc n°2 – INP-HB
Lundi 27 janvier 2025, 8h - 11h

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice - Topologie

Considérons $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et K une partie compacte non-vide de E. On note

$$\mathcal{R} = \left\{ s \in \mathbb{R}_+ \mid \exists a \in K, K \subseteq \overline{B}(a,s) \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ admet une borne inférieure $r \in \mathbb{R}$.
2. Montrer l'existence de deux suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telles que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$ et (a_n) converge dans K, vers un élément noté a. *On pourra pour cela utiliser la compacité de K.*
3. Justifier que $K \subseteq \overline{B}(a,r)$ est que r est le minimum de $\mathcal{R}$.

Ainsi, on a trouvé une boule fermée de rayon minimum, centrée en un point de K enfermant le compact K.
On suppose désormais que le compact K est convexe. Le réel r désigne toujours le rayon minimum trouvé dans les questions précédentes.

4. Construire dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ un compact convexe K tel qu'il existe deux éléments $a_1 \neq a_2$ de K tels que $K \subseteq \overline{B}(a_1,r)$ et $K \subseteq \overline{B}(a_2,r)$. *Un dessin commenté, <u>suffisamment clair</u>, sera accepté.*
5. On suppose dans cette question que la norme $\|.\|$ est euclidienne. On note $\langle . \mid . \rangle$ le produit scalaire associé. On veut montrer que dans ce cas, la boule $\overline{B}(a,r)$ de rayon minimal telle que $K \subseteq \overline{B}(a,r)$ est unique. On suppose par l'absurde que, pour r minimal tel que défini ci-dessus, on dispose de deux éléments distincts a et b de K tels que $K \subseteq \overline{B}(a,r)$ et $K \subseteq \overline{B}(b,r)$.
   (a) Soit $x \in \overline{B}(a,r) \cap \overline{B}(b,r)$. Montrer que $\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\| \leqslant r$.
   (b) Peut-on avoir l'égalité dans la question précédente ? En déduire qu'il existe $s < r$ tel que $K \subseteq \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, s\right)$, et conclure.

Problème - Algèbre linéaire

Notations, rappels et définitions

- Dans le sujet, n désigne toujours un entier naturel non-nul et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.
- Une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, ou simplement une $\mathbb{K}$-algèbre, est une structure algébrique $(\mathcal{A}, +, ., \times)$ telle que $(\mathcal{A}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et la loi $\times$ est bilinéaire.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note I_n la matrice identité d'ordre n, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire si elle s'écrit $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ désigne la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E.
- Une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition et contenant l'application identité id_E. La sous-algèbre engendrée par une partie de $\mathcal{L}(E)$ est la plus petite sous-algèbre (au sens de l'inclusion) de $\mathcal{L}(E)$ contenant cette partie.
- Une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit et contenant la matrice identité I_n. La sous-algèbre engendrée par une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la plus petite sous-algèbre (au sens de l'inclusion) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant cette partie.

Première partie - Préliminaires

Dans cette partie, on établit quelques résultats qui pourront être utiles par la suite.
Pour i et j entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $E_{i,j}$ l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, qui vaut 1. Ces matrices forment donc la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pourra utiliser le symbole de Kronecker défini pour tous entiers i et j par $\delta_{i,j} = 1$ et 0 sinon.

1. *Trace.*
   (a) Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ puis que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$.
   (b) Démontrer que pour $n \geqslant 2$, il peut arriver que $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(CBA)$.
2. *Dualité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
   (a) Démontrer que si f est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

(b) Démontrer que si les matrices $M_1, \dots, M_{n^2}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les formes linéaires définies pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n^2$ par $f_i(M) = \mathrm{Tr}(M_i M)$, forment une base de l'espace dual $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

(c) Considérons l'application linéaire $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n^2} \\ M & \longmapsto & (f_1(M), \dots, f_{n^2}(M)) \end{array} \right.$. Montrer que ϕ est un isomorphisme.

(d) En considérant la base canonique de $\mathbb{K}^{n^2}$, déduire qu'il existe une base $(F_1, \dots, F_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée base *antéduale* de $(f_1, \dots, f_n)$, telle que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{Tr}(M_i M) F_i$$

(e) Démontrer que si f est une forme linéaire telle que $f(MN) = f(NM)$ pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors f est proportionnelle à la trace. *On pourra utiliser les matrices $E_{i,j}$ définies au début de cette partie.*

3. *Sous-algèbres engendrées.* Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par G.

(a) En utilisant la définition d'une sous-algèbre engendrée, démontrer que $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}(G)$.

(b) Démontrer alors qu'il existe une base de $\mathcal{G}$ formée d'éléments de G.

Deuxième partie - Un théorème de Burnside

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{A}$ une partie non-vide de $\mathcal{L}(E)$ et on suppose que les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont E et $\{0\}$, on dit alors que $\mathcal{A}$ est irréductible.

4. Démontrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont exactement les homothéties.

On suppose désormais de plus dans toute cette partie que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Le but des questions 5 à 8 est de démontrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ (théorème de Burnside).

$\lhd$ On considère l'espace vectoriel E^n et ρ le morphisme de groupes :

$$\rho : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E^n) \\ f & \longmapsto & \rho(f) : \left\{ \begin{array}{lcl} E^n & \longrightarrow & E^n \\ (v_1, \dots, v_n) & \longmapsto & (f(v_1), \dots, f(v_n)) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\lhd$ On désigne par E_i le sous-espace vectoriel de E^n défini par

$$E_i = \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times E \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$$

où tous les termes sont tous $\{0\}$ sauf le terme numéro i qui est E.
Ainsi $E^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

$\lhd$ On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Cela détermine une base de chaque E_i, et une base de E^n. Dans cette base, un élément de $\mathcal{L}(E^n)$ est donc représenté par une matrice de taille n^2 par blocs, tous de taille n.

5. (a) Montrer en utilisant la question (4) que la matrice par blocs dans la base décrite ci-dessus d'un élément de $\mathcal{L}(E^n)$ qui commute avec tous les éléments $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} I_n & \ldots & \lambda_{1,n} I_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} I_n & \ldots & \lambda_{n,n} I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{K}), \text{ où } (\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes de E^n qui commutent avec tous les éléments $\rho(a)$ pour $a \in A$.

(b) Démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\rho(f)$ commute avec tous les éléments de $\mathcal{C}$. *On pourra considérer la matrice par blocs de $\rho(f)$.*

6. Soit $W \subseteq E^n$ un sous-espace vectoriel stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. On se propose de démontrer que W admet un supplémentaire dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.
   (a) Démontrer que si $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors $W \cap E_i = \{0\}$ ou $W \cap E_i = E_i$.
   (b) Si $W \cap E_1 = \{0\}$, on pose $W_2 = W \oplus E_1$ et si $W \cap E_1 = E_1$, on pose $W_2 = W$. Que vaut $W \cap E_2$?
   (c) En poursuivant comme ci-dessus, construire une suite croissante $W_1 = W$, W_2, ..., W_n de n sous-espaces de E^n stables par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$, avec $W_n = E^n$
   (d) Construire alors un supplémentaire de W dans E^n stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

7. Soit $W \subseteq E^n$ un sous-espace vectoriel stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Soit W' un supplémentaire de W dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Notons $p : E^n \longrightarrow E^n$ la projection sur W parallèlement à W'. Démontrer que p commute avec tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire que $p \in \mathcal{C}$.

8. (a) Soit $W = \{(a(e_1), \ldots, a(e_n)) \mid a \in \mathcal{A}\} \subseteq E^n$. Vérifier que W est un sous-espace vectoriel de E^n et qu'il est stable par tous les $\rho(b)$ pour $b \in \mathcal{A}$.
   (b) Montrer que pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in \mathcal{A}$, puis conclure que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$. *On pourra utiliser les questions (7) et (5b), et montrer en premier lieu que si p est un projecteur sur W, $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = p(f(e_1), \ldots, f(e_n))$*

Troisième partie - Applications

9. *Théorème de* KOLCHIN. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé d'éléments tous unipotents, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, $\mathrm{Sp}(G) = \{1\}$. On désire démontrer que les éléments de G sont co-trigonalisables (c'est-à-dire qu'ils admettent une base commune de trigonalisation). On note $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ engendrée par G.

   (a) Démontrer qu'un endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$ admet 1 comme seule valeur propre *si et seulement si* $g - \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ est nilpotent.

   (b) On souhaite montrer que $\mathcal{G}$ n'est pas irréductible (en le sens défini au début de la deuxième partie). Par l'absurde, on suppose $\mathcal{G}$ irréductible.

      i. Soit $a \in G$. On écrit $a = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)} + b$ avec b nilpotent. Démontrer que pour tout élément f de G, $\mathrm{Tr}(b \circ f) = 0$

      ii. En déduire que $b = 0$ et conclure.

   (c) Démontrer le théorème de co-trigonalisation énoncé ci-dessus. *On pourra procéder par récurrence.*

10. *Un sous-groupe nécessairement borné.* Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose G irréductible et que les valeurs propres des éléments de G sont toutes de module égal à 1. On désire démontrer que le groupe G est borné.

   (a) Démontrer, en utilisant la question (3a), qu'il existe une base $(M_1, \ldots, M_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments de G.

   (b) Démontrer que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n^2$ et tout élément M de G, on a $|\mathrm{Tr}(M_i M)| \leqslant n$. En déduire, en utilisant la question (2d), que le groupe G est borné pour toute norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.