

Corrigé du Test 3.

MP Spéciale INP-HB - L. TINTINAGLIA

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Méthode 1 : quotient de DL

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^5)\right) \\&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) \\&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\end{aligned}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Méthode 2 : intégration de DL. On sait que $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$.

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

Comme $\tan(0) = 0$, l'intégration donne

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Méthode 3 : identification de DL.

On sait que $\tan' = 1 + \tan^2$. On sait que $\tan \in \mathcal{C}^\infty$ et

est impaire, elle admet donc un DL₅ en 0 de la forme:

$$\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \tan'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4) \\ 1 + \tan^2(x) = 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^5) \end{cases}$$

Par unicité, $\begin{cases} a = 1 \\ 3b = a^2 = 1 \\ 5c = 2ab \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 1/3 \\ c = 2/15 \end{cases}}$

2) Par $t \in \mathbb{R}_+$, $e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^4)$

Comme $\int_0^0 e^{t^2} dt = 0$ on a :

$$\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^x \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right) dt + o(x^5)$$

$$\boxed{\int_0^x e^{t^2} dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)}$$

3) $e^x + e^{ax} - 2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} - 2 + o(x^2)$
 $= (a+1)x + \frac{(a^2+1)x^2}{2} + o(x^2)$

$$\text{Ainsi } \frac{e^x + e^{ax} - 2}{x^2} = \frac{a+1}{x} + \frac{a^2+1}{2} + o(1)$$

Si $a \neq -1$, $\frac{a+1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$. Si $a = -1$,

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Ainsi la fonction admet une limite finie en 0 si et seulement si $a = -1$, dans ce cas elle vaut 1.

$$\begin{aligned} \underline{4)} \quad \sqrt{\frac{x+2}{x}} &= \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{x}\right)^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \left(\frac{2}{x}\right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x}\right)^3 \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$\underline{5)}$ $\Delta \sin(x) \ln(\tan x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \ln\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$
(sujet "difficile" seulement)

$$\begin{aligned} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(\ln x + \ln\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(\ln x + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\ &= x \ln(x) - \frac{x^3 \ln(x)}{6} + o(x^3 \ln x) \end{aligned}$$

$$\Delta \cos(x) \ln(\sin x) = x \ln(x) + \frac{x^3 \ln(x)}{3} + o(x^3 \ln x) \text{ de même.}$$

Ainsi au voisinage de 0^+ :

$$\begin{aligned} &\cos(x)^{\sin(x)} - \sin(x)^{\cos(x)} \\ &= \exp\left(x \ln(x) - \frac{x^3 \ln(x)}{6} + o(x^3 \ln x)\right) \\ &\quad - \exp\left(x \ln(x) + \frac{x^3 \ln(x)}{3} + o(x^3 \ln x)\right) \\ &= e^{x \ln(x)} \left(e^{-\frac{x^3 \ln(x)}{6} + o(x^3 \ln x)} - e^{\frac{x^3 \ln(x)}{3} + o(x^3 \ln(x))} \right) \end{aligned}$$

$$= e^{x \ln(x)} \left(1 - \frac{x^3 \ln x}{6} - 1 - \frac{x^3 \ln x}{3} + o(x^3 \ln x) \right)$$

$$= - \underbrace{e^{x \ln(x)}}_{\substack{\rightarrow 1 \\ x \rightarrow 0^+}} \frac{x^3 \ln(x)}{2}$$

Ainsi $\boxed{\tan(x)^{\sin(x)} - \sin(x)^{\tan(x)} \underset{0^+}{\sim} -\frac{1}{2} x^3 \ln(x)}$

6a, 6b) Voir le cours de Topologie -

ou 5a, 5b)