

NOM : _____

Prénom : _____

Test technique n°1
Équivalents et développements limités

MP Spéciale INP-HB — L. TINTINAGLIA

Note et observations :

CORRIGÉ

8 questions, 40 minutes. Il est demandé de justifier convenablement les calculs. Si le calcul doit être réalisé en plusieurs étapes, présenter les étapes intermédiaires.

Une attention particulière dans la notation sera apportée par la **propreté des copies**

1. Limite en $+\infty$ de $\sqrt{n}\sqrt{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. ①

$$\frac{\pi}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc on a } \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}.$$

Mais $\sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$ donc

$$\sqrt{n}\sqrt{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{n}\frac{\pi}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot \frac{\pi}{n} = \pi$$

On en conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}\sqrt{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$$

2. Limite en 0^+ de $\frac{x}{\ln(x)^{\sin(x)}}$. 2

d'expression n'est pas définie au voisinage de 0.

En effet $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)^{\sin(x)}}$ n'est bien définie que sur

$]1, +\infty[$, puisque pour $x \in]0, 1[$:
$$\begin{cases} \ln(x) \leq 0 \\ \sin(x) < 1 \end{cases}$$

donc $\ln(x)^{\sin(x)}$ n'est pas défini.

3. Limite en 0 de $\frac{1}{x^3} \left(\text{ch}(x)^{\frac{2}{x}} - e^x \right)$. 2,5

$\text{ch}(x)^{\frac{2}{x}} - e^x = e^x \left(e^{\frac{2}{x} \ln(\text{ch}(x)) - x} - 1 \right)$. Mais $\ln(\text{ch}(x)) - x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
donc $\text{ch}(x)^{\frac{2}{x}} - e^x \sim \frac{2}{x} \ln(\text{ch}(x)) - x$.

$$\begin{aligned} \text{Or: } \frac{2}{x} \ln(\text{ch}(x)) - x &= \frac{2}{x} \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - x \\ &= \frac{2}{x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4) \right) - x \\ &= x + \frac{x^3}{12} - \frac{x^3}{4} - x + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

D'où $\text{ch}(x)^{\frac{2}{x}} - e^x \sim -\frac{x^3}{6}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} (\text{ch}(x)^{\frac{2}{x}} - e^x) = -\frac{1}{6}$

4. Equivalent en 0 de $e^{\cos(x)} - e$. 1

$$e^{\cos(x)} - e = e(e^{\cos(x)-1} - 1) \cdot \cos(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{donc } e^{\cos(x)-1} - 1 \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1.$$

$$\text{Ainsi } \boxed{e^{\cos(x)} - e \underset{0}{\sim} e(\cos x - 1)}$$

5. Equivalent en $+\infty$ de $\ln\left(\frac{n^3 + \ln(n)}{3n - \sqrt{n}}\right)$. 1,5

$$\frac{n^3 + \ln(n)}{3n - \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3n} = \frac{n^2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \ln\left(\frac{n^3 + \ln(n)}{3n - \sqrt{n}}\right) &= \ln\left(\frac{n^2}{3} + o(n^2)\right) \\ &= \ln(n^2) + \ln\left(\frac{1}{3} + o(1)\right) \\ &= 2\ln(n) + o(\ln(n)) \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\ln\left(\frac{n^3 + \ln(n)}{3n - \sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(n)}$$

6. DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f_1 : x \mapsto \sin(x)e^{\cosh(x)}$. (2)

Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}\sin(x)e^{\cosh(x)} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)e^{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= e\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(x)e^{\cosh(x)} = e\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}$$

7. DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f_2 : x \mapsto \sqrt{1 + e^x}$. (1,5)

$$\begin{aligned}f_2(x) &= \sqrt{1 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + o(x^2)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{f_2(x) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2\right) + o(x^2)}$$

8. Asymptote en $+\infty$ de $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{(x+1)\tan(\frac{1}{x})}$. 3

On effectue le DL de f_3 à l'ordre $\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+1)\tan\left(\frac{1}{x}\right) &= (x+1)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{On inverse : } \frac{1}{(x+1)\tan(\frac{1}{x})} &= 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Donc } f_3(x) = \left(x + \frac{1}{2x}\right) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_3(x) = \underbrace{x-1}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{7}{6x}}_{\text{position relative}} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{y = x - 1}$$

position relative : courbe au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

9. (BONUS) Equivalent en 0^+ de $\tan(x)^{\sin(x)} - \sin(x)^{\tan(x)}$ de la forme $\alpha x^\beta \ln(x)^\gamma$. 3

$$\begin{aligned}\triangle \sin(x) \ln(\tan x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \ln\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(\ln x + \ln\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(\ln x + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\ &= x \ln(x) - \frac{x^3 \ln(x)}{6} + o(x^3 \ln x)\end{aligned}$$

$$\triangle \ln(x) \ln(\sin x) = x \ln(x) + \frac{x^3 \ln(x)}{3} + o(x^3 \ln x) \text{ de même.}$$

Ainsi au voisinage de 0^+ :

$$\tan(x)^{\sin(x)} - \sin(x)^{\tan(x)}$$

$$= \exp\left(x \ln(x) - \frac{x^3 \ln(x)}{6} + o(x^3 \ln x)\right) - \exp\left(x \ln(x) + \frac{x^3 \ln(x)}{3} + o(x^3 \ln x)\right)$$

$$= e^{x \ln(x)} \left(e^{-\frac{x^3 \ln(x)}{6} + o(x^3 \ln x)} - e^{\frac{x^3 \ln(x)}{3} + o(x^3 \ln(x))} \right)$$

$$= e^{x \ln(x)} \left(1 - \frac{x^3 \ln x}{6} - 1 - \frac{x^3 \ln x}{3} + o(x^3 \ln x) \right)$$

$$= - \underbrace{e^{x \ln(x)}}_{\substack{\rightarrow 1 \\ x \rightarrow 0^+}} \frac{x^3 \ln(x)}{2}$$

Ainsi

$\tan(x)^{\sin(x)} - \sin(x)^{\tan(x)} \underset{0^+}{\sim} -\frac{1}{2} x^3 \ln(x)$
--