Correction de l'IE 2

HP Spéciale INP-HB / L.TINTINAGLIA

Seulement les questions 1, 2, 3, 4, 13 et 14 sont corrigées.
Le reste est dans le cours.

1) On procède par pivot de Gauss.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\equiv_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\equiv_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\equiv_L} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}}_{A'} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right.\right)$$

A' est une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non-nuls. A' est équivalente par lignes à A donc $\boxed{A \in GL_3(\mathbb{R})}$

$$(A|I_3) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\equiv_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_3}{\equiv_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\equiv_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}}{\equiv_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Ainsi $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}$

<u>2)</u> • $\chi_A = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 1 & X & -2 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ 1-X & X & -2 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & X & -2 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \left(\begin{vmatrix} X & -2 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (X-1)\left(X(X-1) - 2 + X - 1 \right) = (X-1)(X^2-3)$$

$$\chi_A = (X-1)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$$

• Ainsi $\boxed{A \text{ est diagonalisable et } Sp(A) = \{-\sqrt{3} ; 1 ; \sqrt{3}\}}$

• On cherche les sous-espaces propres $E_{\pm\sqrt{3}}(A)$, $E_1(A)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff \begin{cases} -y = x \\ -x+2z = y \\ x+y+z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

donc $\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\pm\sqrt{3}}(A) \iff \begin{cases} -y = \pm\sqrt{3}\,x \\ -x+2z = \pm\sqrt{3}\,y \\ x+y+z = \pm\sqrt{3}\,z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -y = \pm\sqrt{3}\,x \\ -x+2z = -3x \\ x+y+z = \pm\sqrt{3}\,z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = \mp\sqrt{3}\,x \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{E_{\pm\sqrt{3}}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ \pm\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}}$

5) $A \in GL_3(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 3}$

$\boxed{\det(A) = \det(D) = -3}$

6) Posons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = (u_0, v_0, w_0)^T \\ \forall n\in\mathbb{N},\ U_n = AU_{n-1} \end{cases}$$

Par récurrence rapide, pour $n\in\mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

Ainsi (U_n) converge si et seulement si $(A^n U_0)$ converge.

Mais $P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n/2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n 3^{n/2} \end{pmatrix} = D^n$.

Ainsi (U_n) converge <u>ssi</u> $(PD^nP^{-1}X_0)$ converge

<u>ssi</u> $(D^nP^{-1}X_0)$ converge (car $P \in GL_3(\mathbb{R})$)

Mais (D^n) diverge (car $|t_{2,2}| = |t_{3,3}| = 3^{n/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$) donc

$(D^nP^{-1}X_0)$ converge <u>ssi</u> $3^{n/2}[P^{-1}X_0]_2 + (-1)^n 3^{n/2}[P^{-1}X_0]_3$ converge

<u>ssi</u> $P^{-1}X_0 \in \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>ssi</u> $X_0 \in \text{Vect}\left(P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E_1(A)$.

Ainsi (u_n), (v_n) et (w_n) convergent si et seulement si

$\exists \mu \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u_0 = -\mu \\ v_0 = \mu \\ w_0 = 0 \end{cases}$. Dans ce cas, $\begin{cases} u_n = -\mu & (\forall n) \\ v_n = \mu \\ w_n = 0 \end{cases}$.

<u>13)</u> Si les $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont distincts, $\chi_{C_P} = P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$

scindé à racines simples.

Alors C_P est diagonalisable. Vérifions ensuite :

$$C_P^T \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \\ \lambda_i^n - P(\lambda_i) \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

donc $E_{\lambda_i}(C_P^T) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}$.

Ainsi $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice

des vecteurs propres associés. Donc $Q = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$

Donc, $Q^{-1} C_P^T Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. En transposant,

$Q^T C_P (Q^{-1})^T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et finalement,

$$\boxed{V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, C_P\, V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$$

14) Voir DM4.