

Corrigé Inténo 1

MP* INP-HB / L. TINTINAGLIA

I.1 ③

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

• Si $\alpha > 1$, si $\beta \geq 0$, pour $n \geq 1$, $n^\alpha \ln(n)^\beta \geq n^\alpha$ donc

$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et par comparaison avec une série de Riemann convergente, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge

Si $\beta < 0$, soit $\gamma \in]\alpha, 1[$.

$$n^\gamma \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{\ln(n)^\beta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée.}$$

Donc $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ avec $\gamma > 1$ d'où la convergence par TCSTP.

• Si $\alpha < 1$, si $\beta \leq 0$, $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n^\alpha}$ terme général d'une série divergente.

Si $\beta > 0$, soit $\gamma \in]\alpha, 1[$:

$$\frac{\frac{1}{n^\gamma}}{\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}} = \frac{\ln(n)^\beta}{n^{\underbrace{\gamma-\alpha}_{>0}}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée}$$

donc $\frac{1}{n^\gamma} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$ d'où la divergence par TCSTP.
terme général d'une série DV.

• Si $\alpha = 1$, $t \mapsto \frac{1}{t \ln^\beta(t)}$ décroissante sur $[2, +\infty[$ et continue.

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \int_2^x \frac{dt}{t (\ln(t))^\beta} &= \left[\frac{1}{1-\beta} \frac{1}{(\ln t)^{\beta-1}} \right]_2^x \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} \right) \end{aligned}$$

qui converge pour $x \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\beta - 1 > 0$
 $\Leftrightarrow \beta > 0$.

I.2 ②

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\ln(n!)}$ $= \frac{1}{\sum_{k=1}^n \ln(k)}$.

On utilise la majoration : pour $k \in \mathbb{I}1, n\mathbb{I}$, $\ln(k) \leq \ln(n)$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{1}{\sum_{k=1}^n \ln(n)} = \frac{1}{n \ln(n)}$.

Mais d'après I.1, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge ($\alpha = \beta = 1$)

donc par TCSTP, $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

I.3 ②

Voir la question 1 du DM2

I.4 ①

Voir la question 2 du DM2.

I.5 ①.5

de la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
on a par $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Soit en sommant :

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = H_n - 1$$

d'où

$$\underbrace{\ln(n+1) - \ln(2) + 1}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty} \leq H_n$$

Donc $\boxed{H_n \rightarrow +\infty}$

I.6 ②

Voir le cours sur les séries, lemme III.A.1

I.7 ②

Soit $\alpha > 1$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (reste d'une série convergente)

Par comparaison série-intégrale comme précédemment, pour $N \geq n \geq 1$,

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

ce qui se réécrit

$$\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

Avec $N \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Mais $(n+1)^{\alpha-1} \underset{+\infty}{\sim} n^{\alpha-1}$ donc

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

I.8 ③

Voir cours sur les séries, Théorème III.A.1.

I.9 ①

• Par concavité de $\ln$, par $x \in \mathbb{R}_1^+$, $\ln(1+x) \leq x$ donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n) - u_n \leq 0$.

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• De plus (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}_+$ tel que $\ln(1+l) = l \Rightarrow l=0$.

Donc $u_n \rightarrow 0$.

I.10 ②

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} &= \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n} \\ &= u_n^{-1} \left(\frac{u_n}{u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + o(u_n^3)} - 1 \right) \\ &= u_n^{-1} \left(\left(1 - \underbrace{\frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \right)^{-1} - 1 \right) \\ &= u_n^{-1} \left(- \left(-\frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2) \right) + \left(-\frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2) \right)^2 + o(u_n^2) \right) \end{aligned}$$

$$= u_n^{-1} \left(\frac{1}{2} u_n - \frac{1}{3} u_n^2 + o(u_n^2) + \frac{1}{4} u_n^2 + o(u_n^2) \right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} u_n + o(u_n)}$$

I.11 (25)

On a $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \geq 0$. Comme de plus $\sum \frac{1}{2}$ diverge, on a par théorème de sommation des relations de comparaison

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

Par télescopage, $u_n^{-1} - u_0^{-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$. Donc :

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \frac{n}{2} + o(n), \text{ avec } \frac{1}{u_0} = o(n),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{n}{2} + o(n)$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{n}{2} + o(n)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + o(1)} \right)$$

$$= \frac{1}{n} (2 + o(1))$$

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$$

I.12 (3)

Posons $S_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2}$. Par I.10, $S_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12} u_n$.

Mais $u_n \sim \frac{2}{n}$ donc $S_n \sim -\frac{1}{6n} < 0$.

$\sum \delta_n$ étant une série divergente,

$$-\frac{1}{6} \ln(n) \sim -\frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^n \delta_k = u_n^{-1} - u_0^{-1} - \frac{n}{2}$$

Ainsi $u_n^{-1} = \underbrace{u_0^{-1}}_{o(\ln(n))} + \frac{n}{2} - \frac{\ln(n)}{6} + o(\ln(n))$

$$\begin{aligned} \text{et } u_n &= \left(\frac{n}{2} - \frac{\ln(n)}{6} + o(\ln(n)) \right)^{-1} \\ &= \frac{2}{n} \left(1 - \underbrace{\frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}_{\rightarrow 0} \right)^{-1} \\ &= \frac{2}{n} \left(1 - \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = \frac{2}{n} - \frac{2 \ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}$$

II.13 ②

Voir cours sur les intégrales, remarque I.C.O.1

II.14 ①

Voir cours sur les intégrales, rappel I.E.2.1

II.15 ②.5

Voir cours sur les intégrales, proposition I.D.O.1

II.16 ②

Voir cours sur les intégrales, proposition I.D.O.1

II.17 (2,5)

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \int_0^x \operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t) dt \\ &= \int_1^{x+1} \operatorname{Arctan}(t) dt - \int_0^x \operatorname{Arctan}(t) dt \\ &= \int_x^{x+1} \operatorname{Arctan}(t) dt - \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt &= \left[t \operatorname{Arctan}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

◦ De plus par croissance de Arctan ,

$$\int_x^{x+1} \operatorname{Arctan}(n) dt \leq \int_x^{x+1} \operatorname{Arctan}(t) dt \leq \int_x^{x+1} \operatorname{Arctan}(n+1) dt$$

$$\text{Ainsi } \underbrace{\operatorname{Arctan}(n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}} \leq \int_x^{x+1} \operatorname{Arctan}(t) dt \leq \underbrace{\operatorname{Arctan}(n+1)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}}$$

Donc $\int_x^{x+1} \operatorname{Arctan}(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$. Donc avec existence de l'intégrale :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t) dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}}$$

II.18 (3)

Notons $f: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \mapsto t \lfloor \frac{1}{t} \rfloor \end{cases}$ continue par morceaux.

Pour $t > 1$, $\lfloor \frac{1}{t} \rfloor = 0$ et $f(t) = 0$ donc f intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour $t > 0$, $\lfloor \frac{1}{t} \rfloor \leq \frac{1}{t}$ et $f(t) \leq 1$ donc f intégrable sur $]0; 1]$.

$$\Delta \int_0^{+\infty} t \lfloor \frac{1}{t} \rfloor dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f(t) dt = I_n. \quad \text{Étudions } (I_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t \lfloor \frac{1}{t} \rfloor dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} k t dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \right) \quad \text{par DES} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Δ Ainsi $\boxed{\int_0^{+\infty} t \lfloor \frac{1}{t} \rfloor dt = \frac{\pi^2}{12}}$

II.19 (3)

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^4 - x^3 + x^2 - x} = \int_2^3 \frac{dx}{x(x-1)(x^2+1)}$$

Par décomposition en éléments simples,

$$= \int_2^3 \left(\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} \right) dx$$

$$\begin{aligned} \triangle \int_2^3 \frac{x-1}{2(x^2+1)} dx &= \frac{1}{4} \int_2^3 \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln(x^2+1) \right]_2^3 - \frac{1}{2} \left[\operatorname{Arctan}(x) \right]_2^3 \\ &= \frac{\ln(10)}{4} - \frac{\ln(5)}{4} - \frac{\operatorname{Arctan}(3)}{2} + \frac{\operatorname{Arctan}(2)}{2} \end{aligned}$$

$$\triangle \int_2^3 -\frac{dx}{x} = -\left[\ln x \right]_2^3 = \ln 2 - \ln 3$$

$$\triangle \int_2^3 \frac{1}{2(x-1)} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x-1) \right]_2^3 = \frac{1}{2} \ln(2)$$

Ainsi $\int_2^3 \frac{dx}{x^4 - x^3 + x^2 - x}$

$$= \frac{\ln(10)}{4} - \frac{\ln(5)}{4} - \frac{\operatorname{Arctan}(3)}{2} + \frac{\operatorname{Arctan}(2)}{2} + \frac{3\ln(2)}{2} - \ln 3$$

$$= \frac{\ln(5)}{2} - \frac{5\ln(3)}{4} + \frac{3\ln(2)}{4} + \frac{\operatorname{Arctan}(2)}{2} - \frac{\operatorname{Arctan}(3)}{2}$$

II. 20 Bonus

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto x^n (\ln x)^p$ est définie et continue sur $]0, 1]$. De plus, les théorèmes de comparaison usuels entraînent que cette fonction se prolonge par continuité en 0 (remarquons l'importance de $n > 0$). Ceci justifie l'existence de $I_{n,p}$. Pour calculer $I_{n,p}$, nous allons réaliser une intégration par parties. On la réalise entre $a > 0$ et 1, pour prendre garde au fait que la fonction logarithme n'est pas définie en 0. On remarque aussi que $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$, et donc il suffit de traiter le cas $p > 0$.

On pose donc

$$I_{n,p}(a) = \int_a^1 x^n (\ln x)^p dx$$

$$\begin{aligned} u(x) &= (\ln x)^p & v'(x) &= x^n \\ u'(x) &= \frac{p(\ln x)^{p-1}}{x} & v(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

On trouve alors,

$$I_{n,p}(a) = \frac{1}{n+1} \left[x^{n+1} (\ln x)^p \right]_a^1 - \frac{p}{n+1} \int_a^1 x^n (\ln x)^{p-1} dx = \frac{-a^{n+1} (\ln a)^p}{n+1} - \frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

On passe à la limite en faisant tendre a vers 0. En utilisant la croissance comparée de la fonction logarithme et des puissances en 0, on trouve :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

On trouve alors

$$I_{n,p} = \frac{(-p) \times (-(p-1)) \times \cdots \times (-1)}{(n+1) \times (n+1) \times \cdots \times (n+1)} I_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$