# Exercice - Topologie

(d'après M. Alain Troesch, alain.troesch.free.fr)

1. Puisque $K$ est non-vide, on dispose de $a \in K$. Puisque $K$ est compact, il est borné. On dispose donc de $M \in \mathbb{R}_+$, tel que $K \subseteq B(0, M)$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in K^2$,
$$\|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2M$$
En particulier, $K \subseteq B(a, 2M)$, et on en déduit que $2M \in \mathcal{R}$. Par conséquent, $\mathcal{R}$ est une partie non-vide de $\mathbb{R}$, et minorée de 0, donc $\mathcal{R}$ admet une borne inférieure $r$, par propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

2. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite $(s_n)$ d'éléments de $\mathcal{R}$ tels que $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$.
A chaque $s_n$ est donc associé au moins un élément $b_n$ de $K$ tel que $K \subseteq \overline{B}(b_n, s_n)$. Comme $K$ est compact, on peut extraire de $b_n$ une suite $(b_{\varphi(n)})$ convergente de $K$. Soit $a$ la limite de cette suite. Puisque $(s_{\varphi(n)})$ est extraite d'une suite convergente, elle est elle-même convergente, de limite $r$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_{\varphi(n)}$ et $r_n = s_{\varphi(n)}$. On a bien :
   - $\lhd$ $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in K$ ;
   - $\lhd$ $(r_n) \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ et $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$

3. Soit $x \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{B}(a_n, r_n)$, donc
$$\|x - a_n\| \leqslant r_n$$
En passant à la limite dans cette inégalité,
$$\|x - a\| \leqslant r$$
donc $x \in \overline{B}(a, r)$. Ainsi, $K \subseteq \overline{B}(a, r)$.
On en déduit en particulier que $r \in \mathcal{R}$, et, puisqu'il en est la borne inférieure, on en déduit $r = \min \mathcal{R}$.

4. - $\lhd$ On peut prendre par exemple $K = [0\,, 1] \times [-1\,, 1]$. L'ensemble $K$ est bien compact (produit de compacts) et clairement convexe.
   - $\lhd$ L'ensemble $K$ étant de diamètre 2 pour $\|.\|_\infty$, on a $r \geqslant 1$. Or $\overline{B}((0,0), 1) = [-1\,, 1]^2$ contient $K$. Donc $r = 1$.
   - $\lhd$ Mais on constate que $K \subseteq \overline{B}((0,0), 1)$ et $K \subseteq \overline{B}((1,0), 1)$. Ainsi, le centre de la boule minimale n'est pas unique.

5. (a) Soit $x \in \overline{B}(a, r) \cap \overline{B}(b, r)$. D'après l'inégalité triangulaire,
$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| = \left|\frac{1}{2}(x-a) + \frac{1}{2}(x-b)\right| \leqslant \frac{1}{2}\|x-a\| + \frac{1}{2}\|x-b\|$$
donc $\left\|x - \dfrac{a+b}{2}\right\| \leqslant r$.

   (b) $\lhd$ L'espace $E$ étant euclidien, on connaît le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : $\|y - z\| = \|y\| + \|z\|$ *si et seulement si* $y$ et $z$ sont positivement colinéaires.
   Ainsi, dans la question précédente, l'égaliét n'est obtenue que si $x - a$ et $x - b$ sont positivement colinéaires, c'est-à-dire si $x$ est sur la droite affine $(a, b)$, et à l'extérieur du segment $[a\,, b]$ (éventuellement $x = a$ ou $b$). Mais dans ce cas,
$$|\|x-a\| - \|x-b\|| = \|b - a\| \neq 0$$
   donc au moins l'une des deux inégalités $\|x - a\| \leqslant r$ ou $\|x - b\| \leqslant r$ est stricte. On en déduit que pour tout $x \in \overline{B}(a, r) \cap \overline{B}(b, r)$, $\left\|x - \dfrac{a+b}{2}\right\| < r$.

   $\lhd$ En particulier, cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in K$, soit alors $s = \sup\limits_{x\in K} \left\|x - \dfrac{a+b}{2}\right\|$.
   En utilisant de nouveau le critère séquentiel pour la borne supérieure, on peut trouver $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ qu'on peut supposer convergente, vers un élément $x \in K$ (quitte à faire une extraction, par compacité), et telle que $\left\|x - \dfrac{a+b}{2}\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$. Par passage à la limite, on a alors
$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| = s$$
   et comme $x \in K$, d'après la question précédente, on en déduit que $s < r$.

   $\lhd$ Ainsi, par définition de $s$, $K \subseteq B\left(\dfrac{a+b}{2}, s\right)$, avec $s < r$. De plus, puisque $K$ est convexe, $\dfrac{a+b}{2} \in K$. Ainsi, cela contredit la minimalité de $r$.

   $\lhd$ On en déduit l'unicité du centre $a \in K$ tel que $K \subseteq \overline{B}(a, r)$, avec $r$ minimal.

# Problème - Algèbre linéaire

(d'après Agrégation interne 2021)

## Première partie - Préliminaires

1. (a) Question de cours (MPSI).
   (b) Il suffit de prendre $A = E_{1,1}$, $B = E_{1,2}$ et $C = E_{2,1}$. Dans ce cas, $ABC = E_{1,1}$ et la trace vaut 1. Par ailleurs, $CBA = 0$ et la trace est nulle.

2. (a) Question de cours (Algèbre linéaire)
   (b) La question précédente nous montre que l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right) \\ A & \longmapsto & f_A : M \longmapsto \mathrm{Tr}(AM) \end{array} \right.$$

   est un isomorphisme d'espace vectoriels entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual (il faut aussi montrer la linéarité).
   Un tel isomorphisme transforme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en base du dual, d'où le résultat.
   (c) Comme $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^{n^2} = n^2$, il suffit de montrer que $\phi$ est linéaire (évident) et injective.
   Soit $M \in \operatorname{Ker} \phi$. Alors pour tout $i \in [\![1\,,n^2]\!]$, $f_i(M) = 0$. Comme $(f_1, \ldots, f_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right)$, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$, on a $\varphi(M) = 0$. Donc $M = 0$. Ainsi $\phi$ est injective donc bijective.
   (d) Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n^2})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n^2}$. Posons pour $j \in [\![1\,,n^2]\!]$, $F_j = \phi^{-1}(\varepsilon_j)$ (en effet $\phi^{-1}$ est un isomorphisme).
   - $(F_1, \ldots, F_{n^2})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est l'image par $\phi^{-1}$ (isomorphisme) d'une base de $\mathbb{K}^{n^2}$.
   - Ensuite, pour $j \in [\![1\,,n^2]\!]$, $\phi(F_j) = \varepsilon_j$ et $\phi(F_j) = (f_1(F_1), \ldots, f_{n^2}(F_{n^2}))$. Ainsi pour $j \in [\![1\,,n^2]\!]$, $f_i(F_j) = \delta_{i,j}$.
   - Prenons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi comme $(F_1, \ldots, F_{n^2})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i F_i, \text{ où } (\alpha_i) \in \mathbb{K}^{n^2}$$

   Mais pour tout $j \in [\![1\,,n^2]\!]$, $\mathrm{Tr}(M_j M) = f_j(M) = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i \underbrace{f_j(F_i)}_{=\delta_{j,i}} = \alpha_j$.

   Ainsi :

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{Tr}(M_i M) F_i$$

   (e) Exercice 58 du TD (Algèbre linéaire).

3. (a) $\mathrm{Vect}(G)$ est inclus dans $\mathcal{G}$. Comme $G$ est un groupe, il contient $I_n$ donc $I_n \in \mathrm{Vect}(G)$. En outre, $G$ étant un groupe, le produit de deux combinaisons linéaires d'éléments de $G$ est encore une combinaison linéaire d'éléments de $G$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(G)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant $G$. On en déduit que $\mathcal{G}$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(G)$, ce qui conclut.
   (b) Avec la question précédente, $G$ constitue une famille génératrice de $\mathcal{G}$ en tant qu'espace vectoriel. On peut donc en extraire une base.

## Deuxième partie - Un théorème de Burnside

4. Exercice 36 du TD (Algèbre linéaire).

5. (a) Soit $a \in \mathcal{A}$. Notons $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Posons $A = \mathrm{Mat}_e(a)$. Alors la matrice de $\rho(a)$ dans la base de $E^n$ correspondante est diagonale par blocs, tous les blocs étant égaux à $A$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_{n^n}(\mathbb{K})$, que l'on note par blocs $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \ldots & M_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \ldots & M_{n,n} \end{pmatrix}$ où chaque bloc $M_{i,j}$ est de taille $n$.
   Alors, $AM = MA$ si et seulement si pour tous $i$ et $j$, $AM_{i,j} = M_{i,j}A$. Ceci étant vrai pour tout $A$, chaque $M_{i,j}$ commute à tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après la question 5, chaque $M_{i,j}$ est une matrice scalaire.
   Ainsi, on dispose de $\lambda_{i,j}$ tel que $M_{i,j} = \lambda_{i,j} I_n$. Et donc :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & & (0) & & \lambda_{1,n} & & (0) \\ & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{1,1} & & (0) & & \lambda_{1,n} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & & (0) & & \lambda_{n,n} & & (0) \\ & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{n,1} & & (0) & & \lambda_{n,n} \end{pmatrix}$$

   La réciproque est claire et on a donc la description voulue.
   (b) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est de matrice $A$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors la matrice de $\rho(f)$ dans la base de $E^n$ correspondante est diagonale par blocs, tous les blocs étant égaux à $A$. Une telle matrice commute bien avec celles obtenues à la question précédente, tous les blocs étant des matrices scalaires. On a donc le résultat.

6. (a) Le sous-espace $W$ est stable par tous les $\rho(a)$ et $E_i$ aussi donc $W \cap E_i$ également.
   Pour $x \in E$, $\rho(a)((0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0)) = (0, \ldots, 0, a(x), 0, \ldots, 0)$ (avec $x$ et $a(x)$ écrits en place $i$) donc l'hypothèse faite sur $\mathcal{A}$ conclut : $W \cap E_i = \{0\}$ ou $E_i$.
   (b) Comme précedemment, $W_2$ et $E_2$ étant stables par tous les $\rho(a)$, cette intersection est nulle ou $E_2$.
   (c) On continue le processus : on pose $W_3 = W_2 \oplus E_2$ si $W_2 \cap E_2 = \{0\}$ et $W_2$ si $W_2 \cap E_2 = E_2$, etc... jusqu'à l'ordre $n$.
   Cette suite finie est clairement croissante et constituée de sous-espaces tous

stables par les $\rho(a)$. On a bien $W_n = E^n$ car par construction $E^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n \subseteq W_n \subseteq E^n$.
On dispose donc de $W \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n = E^n$ tous stables par les $\rho(a)$.

(d) On part d'une base de $W$ et on complète en une base de $W_2$, puis de $W_3$, etc... jusqu'à obtenir une base de $E^n$ ainsi : on ne rajoute rien quand $W_i = W_{i+1}$ dans la construction précédente et on complète avec une base de $E_i$ quand $W_{i+1} = W_i \oplus E_i$.
Les vecteurs ainsi rajoutés à la base de $W$ engendrent alors un sous-espace supplémentaire de $W$ dans $E^n$ formé de la somme directe d'un certain nombre de $E_i$, donc bien stable par les $\rho(a)$.

7. Soit $a \in \mathcal{A}$.
Si $x \in W$, alors $p \circ \rho(a)(x) = \rho(a)(x) = \rho(a) \circ p(x)$.
Si $x \in W'$, alors $p \circ \rho(a)(x) = 0 = \rho(a) \circ p(x)$.
Ainsi on a bien $p \circ \rho(a) = \rho(a) \circ p$ car $W \oplus W' = E^n$.

8. (a) Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, $W$ est bien un sous-espace vectoriel de $E^n$ (à ce stade du sujet, cela est suffisant comme justification).
Si $a, b \in \mathcal{A}$, $\rho(b)(a(e_1), \ldots, a(e_n)) = (b \circ a(e_1), \ldots, b \circ a(e_n)) \in W$ car $b \circ a \in \mathcal{A}$.

(b) Notons $p$ un projecteur sur $W$ construit comme à la question (7). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \rho(f)(e_1, \ldots, e_n) = \rho(f)(p(e_1), \ldots, p(e_n)) = \rho(f) \circ p(e_1, \ldots, e_n)$ car $e_1, \ldots, e_n \in W$ (il suffit de prendre $a = \mathrm{id}$).
Avec la question (8), $p \in \mathcal{C}$ et par (5b), $p$ commute avec $\rho(f)$.
Ainsi, $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = p \circ \rho(f)(e_1, \ldots, e_n) = p(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in W$ car $p$ est un projecteur sur $W$.
Il existe donc $a \in \mathcal{A}$ tel que $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = (a(e_1), \ldots, a(e_n))$. On conclut que $f = a$ car ils coincïdent sur une base de $E$. Finalement, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, c'est le théorème de Burnside.

## Troisième partie - Applications

9. (a) On a dans ce cas $\chi_g = (X-1)^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_g(g) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$. Ainsi, $(g - \mathrm{id}_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)})^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$. Donc $g - \mathrm{id}_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ est nilpotent.
La réciproque est évidente.

(b) i. Si $f \in G$, $\mathrm{Tr}(a \circ f) = \mathrm{Tr}(f) + \mathrm{Tr}(b \circ f)$. Comme $a \circ f$ et $f$ sont dans $G$ et que les éléments de $G$ sont unipotents, leur trace vaut $n$. On déduit que $\mathrm{Tr}(b \circ f) = 0$.

ii. Par linéarité de la trace, et comme $G$ est un groupe, pour tout élément $f$ de $\mathrm{Vect}(G) = \mathcal{G}$, $\mathrm{Tr}(f) = 0$. Par théorème de Burnside, $\mathcal{G} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.
Comme ci-dessus, $b = 0$.
Finalement, $G$ est réduit à l'identité et par irréductibilité $n = 1$, ce qui est exclu.

(c) Comme $\mathcal{G}$ n'est pas irréductible, soit $F$ un sous-espace vectoriel non-trivial de $\mathbb{C}^n$, stable par tous les éléments de $G$.
Considérons $(f_1, \ldots, f_d)$ une base de $F$ où $d = \dim F \in [\![1, n-1]\!]$. On complète en une base de $\mathcal{G}$, notée $\mathcal{B}$. Ainsi, dans cettte base,

$$\forall g \in G, \exists (A_g, B_g, C_g) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n-d}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} A_g & B_g \\ 0 & C_g \end{pmatrix}$$

On procède maintenant par récurrence forte sur $n$.

- ◅ Si $n = 2$, les éléments de $G$ sont bien cotrigonalisables (en effet dans la base $\mathcal{B}$, leurs matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ triangulaire supérieure).
- ◅ Supposons maintenant le résultat prouvé pour les dimensions $\leqslant n-1$.
Les ensembles $\{A_g, g \in G\}$ et $\{C_g, g \in G\}$ sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$, car $\mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(C)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ces deux groupes.
Ainsi, les éléments de $\{A_g, g \in G\}$ et $\{C_g, g \in G\}$ sont co-trigonalisables.
En raisonnant par blocs, on peut donc co-trigonaliser les éléments de $G$ car si $P$ et $Q$ sont des matrices inversibles qui trigonalisent respectivement $A$ et $C$, alors la matrice inversible $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ trigonalise bien $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
Ainsi les éléments de $G$ sont bien trigonalisables.

10. (a) Comme $G$ est un groupe, par la question (3a), $\mathrm{Vect}(G)$ est la sous-algèbre engendrée par $G$.
D'après le théorème de Burnside, $\mathrm{Vect}(G) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On peut donc, en prenant une base $(M_1, \ldots, M_{n^2}$ de $\mathrm{Vect}(G)$, on obtient une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Pour $M \in G$, et $i \in [\![1, n^2]\!]$, $M_i M \in G$ donc $|\mathrm{Tr}(M_i M)| \leqslant n$ puisque la trace est la somme des valeurs propres (égales à 1 pour les éléments de $G$).
D'après la question (2d) (et ses notations), on écrit que pour tout $M \in G$,

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{Tr}(M_i M) F_i$$

Par équivalence des normes en dimension finie, $G$ est borné.