MP Spé

Proposition de corrigé du premier CB.

L. TINTINAGLIA

Q1). La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

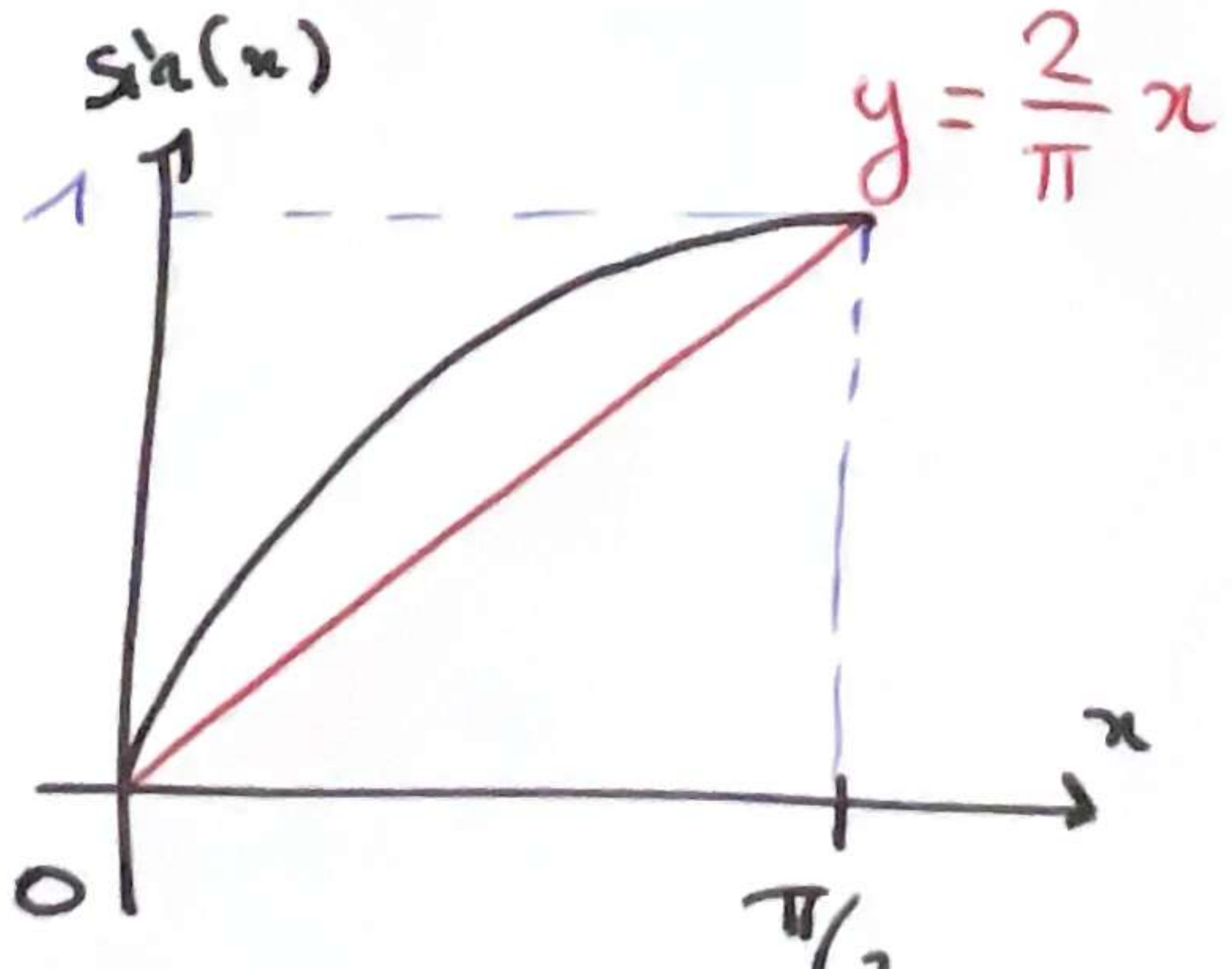
De plus, pour $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$$

Car la fonction sinus est positive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que $\boxed{x \mapsto \sin(x) \text{ est concave sur } [0,\frac{\pi}{2}]}$.

. Ainsi, la courbe représentative du sinus est au-dessus de ses cordes.



Soit $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

Alors :

$$\sin(x) \geq \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} x + \sin(0)$$

Soit :

$$\boxed{\sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x}$$

Q2) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(t) = e^{it} - 1 - it$$

$$= \left(1 + it + \frac{(it)^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right) - 1 - it$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \quad \text{car } i^2 = -1$$

$$\boxed{f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}}$$

Q3) Soit $x \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$.

$$e^{xf(t)} = e^{x(e^{it}-1-it)} = e^{x(\cos(t) + i\sin(t) - 1 - it)}$$

$$= \exp\left(x(\cos t - 1) + ix(\sin t - t)\right)$$

donc $\boxed{|e^{xf(t)}|} = e^{x(\cos t - 1)} = \boxed{e^{-2x\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}}$

(en effet si $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$)

Q4) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [-\pi; \pi]$. D'après l'inégalité de concavité obtenue en Q1,

$$\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{\pi^2}$$

Ainsi, par décroissance de $t \mapsto e^{-2xt}$ à x fixé,

$$\boxed{\left|e^{xf(t)}\right| = e^{-2x\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \leq e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}}}.$$

Q5) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition de G_x :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_x(e^{it})e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{\mathbb{P}(X=n)e^{it(n-k)}}^{\varphi_n(t)}\,dt$$

Intervertissons série et intégrale : la série $\sum_n \varphi_n(t)$ converge simplement puisque d'après l'énoncé, G_x est bien définie sur $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$. De plus,

$$\sup_{t\in[-\pi;\pi]} |\varphi_n(t)| = \mathbb{P}(X=n) \text{ terme général}$$

d'une série convergente (car $G_x(1)$ converge).

Ainsi $\sum_n \varphi_n(t)$ converge normalement donc uniformément sur $[-\pi;\pi]$. Finalement, pour $k\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_x(e^{it})e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(n-k)}\,dt$$

Or : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(n-k)}\,dt = 2\pi\,\delta_{n,k}$ (l'écrire)

Ainsi : $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_X(e^{it})e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,\delta_{n,k}\,2\pi$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\,\mathbb{P}(X=k)$$

$$\boxed{= \mathbb{P}(X=k)}$$

C'est un cas particulier de la formule de Cauchy que nous verrons en cours.

Q6) voir le cours de Topologie.

Q7) • Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$|\Phi(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{xf(t)}\,dt\right| \overset{iT}{\leq} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{xf(t)}|\,dt$$

$$\boxed{|\Phi(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}}\,dt} \text{ d'après Q4}$$

• Continuité : ▲ pour $t \in [-\pi;\pi]$, $x \mapsto e^{xf(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, par continuité de exp.

▲ pour $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto e^{xf(t)}$ est continue donc continue par morceaux sur $[-\pi;\pi]$, car f l'est.

▲ De plus pour $x \in \mathbb{R}_+$, $t \in [-\pi,\pi]$,

$$|e^{xf(t)}| \leq e^{-\underbrace{2x}_{x\geq 0}\frac{t^2}{\pi^2}} \leq e^0 = 1 = \varphi(t)$$

avec $\varphi \in \mathcal{C}^0_{pm}([-\pi,\pi], \mathbb{R}_+)$ intégrable car constante sur un segment.

Donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\boxed{\Phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$. De plus $\boxed{\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ par théorème de convergence dominée, aux mêmes hypothèses.

<u>Q8)</u> Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\sqrt{x}\,\Phi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x}\, e^{xf(t)}\,dt$. On effectue le changement de variables $u : t \mapsto t\sqrt{x}$ $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant en t. Alors $dt = \frac{du}{\sqrt{x}}$ d'où

$$\sqrt{x}\,\Phi(x) = \int_{-\pi\sqrt{x}}^{\pi\sqrt{x}} \cancel{\sqrt{x}}\, e^{xf\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)} \frac{du}{\cancel{\sqrt{x}}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-\pi\sqrt{x};\pi\sqrt{x}]}(u)\, e^{xf\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}\,du$$

$$\boxed{\sqrt{x}\,\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(u)\,du}$$ avec la h_x défini dans l'énoncé.

Q9) Soit $u \in \mathbb{R}$. D'après Q2,

$$f\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^2}{2} = -\frac{u^2}{2x}$$

Ainsi : $h_x(u) = \exp\left(x f\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\right)$ pour $|u| \leq \sqrt{x}\pi$

$$= \exp\left(x\left(-\frac{u^2}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{u^2}{2} + \underset{x\to+\infty}{o}(1)\right)$$

$$= e^{-u^2/2}(1+o(1))$$

$$\boxed{h_x(u) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}}$$

Q10) • pour $u \in \mathbb{R}$, $h_x(u) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-u^2/2} = h(u)$

• les fonctions h_x (pour $x \in \mathbb{R}_+^*$) et h sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Pour $x>0$, $u \in \mathbb{R}$, $|h_x(u)| = \left|e^{x f\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}\right|$

donc par Q4, appliquée avec $t = \frac{u}{\sqrt{x}}$

$$|h_x(u)| \leq e^{-2x\left(\frac{\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^2}{\pi^2}\right)} = e^{-2\frac{u^2}{\pi^2}} = \varphi(u)$$

avec $\varphi \in \mathcal{C}^0_{pm}([-\pi;\pi], \mathbb{R}_+)$.

De plus φ est intégrable (voir le cours sur les Intégrales généralisées).

• Ainsi, par théorème de convergence dominée,

$$\sqrt{x}\,\Phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$$

Mais d'après l'énoncé,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}$$

D'où : $\sqrt{x}\,\Phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sqrt{2\pi}$. Ainsi :

$$\boxed{\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}}$$

Q11) C'est au programme. Si $X \sim \mathcal{P}(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$,

alors

$$\boxed{G_X : t \longmapsto e^{n(t-1)}}$$

Q12) Soit $k\in\mathbb{N}$. On sait que $\mathbb{P}(X=k) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}$

Donc, par Q5,

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} = \mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_X(e^{it})e^{-int}\,dt$$

Puis par Q11,

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1)-int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{nf(t)}\,dt$$

$$\boxed{\frac{n^n e^{-n}}{n!} = \frac{1}{2\pi}\Phi(n)}$$

Q13) Par Q10, $\Phi(n) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ d'où

$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi n}}$ soit : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}$

Q14) Soit $\psi : \begin{cases} \mathcal{C}^0([0,1]) \longmapsto [0,1] \\ g \longmapsto g(0) \end{cases}$. ψ est

une forme linéaire non-nulle de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1])$.

En effet pour $g, h \in \mathcal{C}([0,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(g+\lambda h) = (g+\lambda h)(0) = g(0) + \lambda h(0) = \psi(g) + \lambda\psi(h).$$

Donc $\ker(\psi)$ est un hyperplan de $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Or, $\boxed{\mathcal{F} = \ker(\psi)\text{, c'est donc un hyperplan}}$

De plus $\mathcal{F} = \psi^{-1}\{0\}$ est $\boxed{\text{fermé}}$ comme image réciproque du fermé $[0,1]$ par ψ application continue.

Q15). D'après le théorème de Weierstrass, $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme infinie.

Ainsi comme $g \in \mathcal{C}([0,1])$, on dispose de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$, $\|g - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ c'est-à-dire que $\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } g}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\|g - Q_n\|_\infty = \|g - g(0) + P_n - P_n(0)\|_\infty \text{ car } g(0)=0.$$

$$\overset{IT}{\leq} \underbrace{\|g - P_n\|_\infty}_{\substack{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{par convergence} \\ \text{uniforme}}} + \underbrace{|g(0) - P_n(0)|}_{\substack{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{par convergence} \\ \text{simple en } 0}}$$

Ainsi $\boxed{\|g - Q_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ d'où la convergence uniforme}}$

- On a montré que $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{P}_0}$ car si $g \in \mathcal{F}$, on dispose des $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_0^{\mathbb{N}}$ précédents tels que

$$\|Q_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

Réciproquement, $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{F}$ donc $\overline{\mathcal{P}_0} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$. Mais $\mathcal{F}$ est fermé donc $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{P}_0} \subseteq \mathcal{F}$. D'où

$$\boxed{\overline{\mathcal{P}_0} = \mathcal{F}}$$

Q16) • g ainsi définie est continue sur $]0,1]$.

De plus $-\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{t}\right)$ pour $t \in]0,1]$ et

$\ln\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t \to 0^+]{} +\infty$. Or $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ donc

$h(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et ainsi par composition de limites,

$h(-\ln t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ et on peut $\boxed{\text{prolonger } g \text{ par continuité}}$

en 0 avec $g(0) = \lim\limits_{t \to 0} g(t) = 0$. D'où $\boxed{g \in \mathcal{F}}$

• De plus $\begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R}_+ \\ t \mapsto -\ln t \end{cases}$ est bijective, continue donc

$$\sup_{t \in]0,1]} |h(-\ln t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |h(t)| = N_\infty(h)$$

Mais par continuité de g en 0, et comme $g(0) = 0$,

$$\sup_{t \in]0,1]} |h(-\ln t)| = \sup_{t \in [0,1]} |g(t)| = \|g\|_\infty .$$

Finalement : $\boxed{\|g\|_\infty = N_\infty(h)}$

Q17) $g \in \mathcal{F} = \overline{\mathcal{P}_0}$ donc on dispose de $(R_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_0^{\mathbb{N}}$, $\|R_n - g\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par Q15.

Or $R_n \in \mathcal{P}_0$ donc $R_n(0) = 0$ et $X \mid R_n$.

Ainsi la fraction rationnelle $P_n = \frac{R_n}{X}$ est un polynôme en X de degré $\deg(R_n)-1$.

Ainsi $(P_n)_n \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ (mais pas nécessairement $\mathcal{P}_0^{\mathbb{N}}$).

Montrons que $f_n : x \mapsto e^{-x} P_n(e^{-x})$ converge uniformément vers h, sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, et $t_x = e^{-x} \in]0,1]$

$$|h(x) - f_n(x)| = |h(-\ln t_x) - f_n(-\ln t_x)|$$
$$= |h(-\ln t_x) - t P_n(t_x)|$$
$$= |g(t_x) - R_n(t_x)|$$

Or $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $t_x \in [0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ |g(t_x) - R_n(t_x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ |h(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

Donc $\boxed{(x \mapsto e^{-x} P_n(e^{-x}))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

Q18) Soit $\gamma : x \mapsto e^{-x}$. γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^{(n)} : x \mapsto (-1)^n e^{-x}$, donc pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|\gamma^{(n)}(x)| \leq 1$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|\gamma(x) - A_n(x)| \leq 1 \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{n!}$$

car $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^{(k)}(x) \frac{x^k}{k!}$.

On a donc comme $\gamma(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\left| e^{-2x} - e^{-x} A_n(x) \right| \leq \frac{x^n e^{-x}}{n!}}$$

Q19) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\xi_n : x \mapsto x^n e^{-x}$, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\xi_n'(x) = e^{-x}(nx^{n-1} - x^n).$$

Ainsi, $\xi_n'(x) \leq 0 \iff nx^{n-1} \leq x^n \iff n \leq x$

D'où

x	0		n		$+\infty$
ξ_n		$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	

Ainsi le maximum est atteint en $x=n$ et vaut $g_n(n) = n^n e^{-n}$.

Donc pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\boxed{x^n e^{-x} \leq n^n e^{-n}}$.

- Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|e_2(x) - e^{-x} A_n(x)| \leq \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

Par Stirling, $\frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |e_2(x) - e^{-x} A_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Mais $(x \mapsto e^{-x} A_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \in D^{\mathbb{N}}$ donc $\boxed{e_2 \in \overline{D}}$

<u>Q20)</u> Soit $n \geq 2$ tel que $e_n \in \overline{D}$.

Posons $B_n(X) = P\left(\frac{n+1}{2} X\right) \in \mathcal{P}$. Alors,

d'après Q18, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\left(y = \frac{n+1}{2} x\right)$,

$$\left| e^{-2 \cdot \frac{n+1}{2} x} - e^{-\frac{(n+1)x}{2}} P\left(\frac{n+1}{2} x\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

soit $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \quad \left| e^{-(n+1)x} - e^{-nx/2} e^{-x/2} B_n(x) \right| < \varepsilon/2}$

Q21) Comme $e_n \in \overline{D}$, on dispose de $\widetilde{Q} \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$|e^{-nx} - e^{-x}\widetilde{Q}(x)| < \frac{\varepsilon}{2M+1}$$

On applique cela avec $\frac{x}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$;

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ |e^{-nx/2} - e^{-x/2}\widetilde{Q}(\tfrac{x}{2})| < \frac{\varepsilon}{2M+1}$$

Alors avec $Q(X) = \widetilde{Q}(\frac{X}{2}) \in \mathcal{P}$ on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ |e^{-nx/2} - e^{-x/2} Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2M+1}}$$

Q22) On pose $\varphi : x \mapsto Q(x) B_n(x) e^{-x} \in D$ car QB_n est un polynôme. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$|e^{-(n+1)x} - \varphi(x)| \overset{IT}{\leq} |e^{-(n+1)x} - e^{-nx/2} e^{-x/2} B_n(x)|$$
$$+ |e^{-nx/2} e^{-x/2} B_n(x) - Q(x) B_n(x) e^{-x}|$$
$$\overset{Q20}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + |e^{-x/2} B_n(x)| \cdot \underbrace{|e^{-nx/2} - e^{-x/2} Q(x)|}_{\overset{Q21}{\leq} \frac{\varepsilon}{2M+1}}$$

De plus $\psi : x \mapsto e^{-x/2} B_n(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

En effet $\begin{cases} \psi(0) = 0 & \text{car } P(0) = 0 \\ \psi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 & \text{par croissance comparée.} \end{cases}$

Ainsi $|e^{-x} B_n(x)| \leq M$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|e^{-(n+1)x} - \varphi(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M+1} \boxed{< \varepsilon}$$

Ceci se réécrit $\|e_{n+1} - \underbrace{\varphi}_{\in D}\|_\infty < \varepsilon$, c'est dire

que $\boxed{e_{n+1} \in \overline{D}}$

<u>Q23)</u> • Soit $H = \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. D'après le principe de récurrence (initialisation en Q19 et hérédité obtenue en Q22), pour $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \in \overline{D}$ (α)

Néanmoins, comme D est un espace vectoriel, d'après Q6, $\overline{D}$ est un espace vectoriel. Ainsi (α) amène

$$H = \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \overline{D}.$$

• Montrons ensuite que $\overline{H} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$. Soit $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$.

D'après Q17, on dispose de $(f_n : x \mapsto e^{-x} P_n(e^{-x}))_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers h, avec $(P_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons

$$P_n = \sum_{k=0}^{d_n} a_{k,n} X^k$$

Dans ce cas pour $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{d_n} a_{k,n} e^{-kx}$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{d_n+1} a_{k-1,n} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{d_n+1} a_{k-1,n} e_k(x)$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathrm{Vect}((e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}) = H$.

D'où comme (f_n) converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}_+$, $h \in \overline{H}$. Donc $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \subseteq \overline{H}$. La réciproque est évidente.

· Finalement, $\overline{D} = \overline{\overline{D}} = \overline{H} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ donc

$$\boxed{\overline{D} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}$$

c'est-à-dire que $\boxed{D \text{ est dense dans } \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}$.

<u>Q24)</u> $\cdot\ \mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)$

$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j)$ par linéarité de l'espérance

$= n \cdot \mathbb{E}(X_1)$ car les (X_j) suivent la même loi.

Mais $\mathbb{E}(X_1) = -1 \cdot \mathbb{P}(X_1 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = 1) = 0$.

Donc $\boxed{\mathbb{E}(S_n) = 0}$.

$\cdot\ \mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{V}(X_j) + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$

Mais les $(X_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes

donc pour $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$. Ainsi :

$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{V}(X_j) = n\mathbb{V}(X_1)$ de même.

Or $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \underbrace{\mathbb{E}(X_1)^2}_{0} = 1$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{V}(S_n) = n}$.

<u>Q25)</u> On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|S_n| > n\varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(n\varepsilon)^2}$$

car $\mathbb{E}(S_n) = 0$. Ainsi par Q24,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}}$$

Q26) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{\substack{I \subseteq [\![1, 2n]\!] \\ |I| = n}} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i \in I} (X_i = 1)\right) \cap \left(\bigcap_{i \notin I} (X_i = -1)\right)\right)$$

$$= \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}}$$

. On utilise ensuite l'équivalent de Stirling :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}} \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}}{2\pi n \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n}}$$

$$\sim \frac{1}{\cancel{2^{2n}}} \cdot \frac{2\sqrt{\pi n}\, \cancel{2^{2n}}\, \cancel{n^{2n}}}{2\pi n \cdot \cancel{n^{2n}}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$$

Q27) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\alpha_n = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon \,\middle|\, S_{2n} = 0\right)$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(S_{2n} = 0 \,\middle|\, \left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right)}{\mathbb{P}(S_{2n} = 0)} \quad \text{(Bayes)}$$

$$\leqslant \frac{\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right)}{\mathbb{P}(S_{2n} = 0)} \quad \text{car } \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0 \,\middle|\, \left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq 1.$$

$$\alpha_n \underset{Q25}{\leqslant} \frac{1}{n\varepsilon^2 \mathbb{P}(S_{2n} = 0)} \underset{Q26}{\sim} \frac{\sqrt{\pi n}}{n\varepsilon^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\boxed{\alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

Q28) On a $\boxed{R = 1}$ car $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)x^{2n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$

terme d'une série $\begin{cases} \text{convergente pour } |x| < 1 \\ \text{divergente pour } |x| > 1 \end{cases}$ par

croissances comparées.

De plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ $\boxed{\text{diverge}}$ car $\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}} \geqslant 0$

est le terme général d'une série divergente.

Q29) On a $\boxed{G_Y : t \mapsto \left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}(t+1)^{2n}}$

Q30) $\mathbb{P}(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2n-n}$

$$= \mathbb{P}(Y=n)$$

$$\overset{Q5}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_Y(e^{it})e^{-int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2^{2n}}(e^{it}+1)^{2n}e^{-int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{it/2}+e^{-it/2}}{2}\right)^{2n}dt$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{2n}=0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(u)\,du\end{aligned}}$$

(formule d'Euler)

par le changement de variables $u = t/2$, $du = dt/2$.

Q31) Soit $x \in]-1,1[$.

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_{2n}=0)x^{2n} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(u)x^{2n}\,du$$

On intervertit série et intégrale car

$$\sup_{u\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left|\cos^{2n}(u)x^{2n}\right| = |x|^{2n}$$

terme général d'une série convergente pour $x\in]-1,1[$
$=]-R,R[$.

Cette série converge normalement donc uniformément sur $]-1,1[$ et ainsi, pour $x\in]-1,1[$:

$$H(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\cos^{2n}(u)x^{2n}}_{=(x^2\cos^2(u))^n} du$$

$$\boxed{= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x^2\cos^2(u)}\, du}$$

Q32) Ici, le plus simple est d'écrire le développement en série entière de H (cela doit aussi être possible avec du calcul intégral). Pour $|x|<R$,

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(x^2)^n \text{ d'après Q26}.$$

or $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)}_{a_n}(-x^2)^n + 1$$

Pour $n\geq 1$, $$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

Donc $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(-x^2)^n \boxed{= H(x)}$$

Q33) ▵ Bonne définition : théorème des séries alternées. Notons $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$

. Il est évident que à x fixé, $u_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} e^{-x}\right) \geq 0$ car $\frac{\pi}{2} e^{-x} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc $1 + \frac{\pi e^{-x}}{2n \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{-x}\right)} \geq 1$ et $u_n(x) \geq 0$.

. À x fixé, $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \ln\left(\overbrace{\frac{n(n+1) + n\, u(x)}{n(n+1) + (n+1)\, u(x)}}^{\leq 1}\right)$

où $u(x) = \frac{\pi e^{-x}}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{-x}\right)}$ donc $u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq 0$

Ainsi $\sum (-1)^{n-1} u_n(x)$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+$ d'où la

$\boxed{\text{bonne définition de } S \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

▵ L'inégalité provient également du théorème des séries alternées : $R_n(x) \leq |u_{n+1}(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi $\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-1} u_k(x) \leq |u_{n+1}(x)|$

$$= \left| (-1)^n \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2(n+1) \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{-x}\right)}\right)\right|$$

De plus pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} e^{-x}\right) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-x} = e^{-x}$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-1} u_k(x) \leq \ln\left(1 + \frac{\pi}{2(n+1)}\right)$$

ce qui amène :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^{k-1}\ln\left(1+\frac{\pi e^{-x}}{2n\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right)\leq \ln\left(1+\frac{2}{(n+1)\pi}\right)}$$

Q34) On sait que S converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Il suffit donc de montrer que les restes convergent uniformément vers 0. En effet, en notant $S_n(x)$ les sommes partielles, si $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|R_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|S(x)-S_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où la convergence uniforme de S_n vers S sur $\mathbb{R}_+$ et la continuité de S (car les (S_n) sont continues).

Montrons cela : pour $x\geq 0$,

$$|R_n(x)| \overset{Q33}{\leq} \ln\left(1+\frac{2}{(n+1)\pi}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|R_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors par ce qui précède, $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$

Q35) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} -\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k}{2k+1}\right)$$

$$= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)}\right)$$

Or $\prod_{k=1}^{n} 4k^2 = 2^{2n}(n!)^2$ et de plus :

$$\prod_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n-1} k}{\prod_{k=1}^{n-1} (2k)} = \frac{(2n-1)! \times 2n}{2^{n-1}(n-1)! \times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Finalement :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2 (2^n n!)^2}{(2n)!(2n+1)!}\right)$$

$$\boxed{= \ln\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\right)}$$

Q36) Procédons par théorème de la double limite.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. En effet

$$\frac{\pi e^{-x}}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{(sinus cardinal)}.$$

Donc $(-1)^{n-1}u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} (-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

- $\sum (-1)^{n-1}u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ (qui est un voisinage de $+\infty$) d'après la question précédente ;

- On a évidemment la convergence simple de S donc :

$$S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$ avec convergence de la série.

Mais par Q35, $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\right)$

Par Stirling,

$$\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{4n}(2\pi n)^2 n^{4n}e^{-4n}}{\sqrt{4\pi n}\,n^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi(n+1)}\,(2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{2^{4n}}\,4\pi^2 n^2 \cancel{n^{4n}}\,\cancel{e^{-4n}}}{\sqrt{4\pi n}\,\cancel{n^{2n}}\,\cancel{e^{-2n}}\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n+1}\cancel{e^{-2n}}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\pi^2 n^2}{4\pi n \cdot 2n} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\dfrac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$ et donc par continuité du $\ln$, $\ln\left(\dfrac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Finalement : $\boxed{S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}$