

DM8 - Généralités en analyse

L. TINTINAGLIA

Ce devoir est à rendre pour le **lundi 24 février 2025**. Il s'agit du dernier devoir de l'année. Prenez-le comme votre ultime entraînement sur un sujet de concours.

Exercice - Analyse différentielle

1. Résoudre
$$\begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$$
2. Résoudre
$$\begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z \end{cases}$$
3. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.
4. On pose $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x^{2n} + y^{2n})$.
 - (a) Déterminer le domaine de définition D de f .
 - (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .
5. En effectuant un changement de variables, trouver les fonctions f vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^3$$

Problème - Analyse générale, séries et intégrales

Le but de ce problème est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$$

et d'appliquer ce calcul pour évaluer une espérance.

A) Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0, 1[$ fixé.

1. Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, la fonction définie par

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} \end{aligned}$$

est définie et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$\begin{aligned} r :]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} dt . \end{aligned}$$

2. Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad r'(\theta) = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt.$$

Indication : soit $\beta \in]0, \pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta, \beta]$ et $t \in [0, +\infty[$, $|1 + te^{i\theta}|^2 \geq |1 + te^{i\beta}|^2 = (t + \cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$\begin{aligned} r :]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto e^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} dt . \end{aligned}$$

3. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$:

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h(t) dt,$$

où h est la fonction définie par

$$\begin{aligned} h :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \frac{t^x}{1 + te^{i\theta}} . \end{aligned}$$

Calculer $h(0)$ et :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t).$$

En déduire que la fonction g est constante sur $] -\pi, \pi[$.

4. Montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{2i} (g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}) = \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2 + 2t \cos(\theta) + 1} dt.$$

5. En déduire que :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad g(\theta) \sin(x\theta) = \int_{\cotan(\theta)}^{+\infty} \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2} du,$$

$$\text{où } \cotan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

6. Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) \sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2}.$$

7. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

B) Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0, 1[$ fixé.

8. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t} \right) dt.$$

9. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}.$$

10. Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

11. En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}.$$

12. En déduire enfin que :

$$\forall y \in]0, \pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2 \pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}.$$

C) Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt = (2p+1) \int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} dt.$$

15. En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt.$$

16. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} dt.$$

Dans le cas $p = 0$, cette intégrale est communément appelée « intégrale de Dirichlet ».

17. Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right).$$

Indication : on pourra développer $\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2p}$.

18. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$

D) *Facultatif* - Calcul de $\mathbb{E}(|S_n|)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

19. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20. Montrer que :

$$\mathbb{E}(\cos(S + T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\mathbb{E}(\cos(T)).$$

21. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n.$$

22. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Montrer que

$$|a + b| = |a| + \text{signe}(a)b$$

où $\text{signe}(x) = x/|x|$ pour tout x réel non nul. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|).$$

23. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}|s|.$$

24. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^n}{t^2} dt.$$

25. Conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}.$$