DM7 - Probabilités, convexité et orthogonalité

L. Tintinaglia

Ce devoir est à rendre pour le **lundi 10 février 2025**.

Exercice - Probabilités

Les $n \geqslant 2$ participants à une soirée déposent leur veste au vestiaire. A la fin de la soirée, les vestes sont redistribuées aléatoirement. Soit X le nombre d'invités qui retrouvent leur veste. Préciser la loi et l'espérance de X.

Toute tentative de solution, même partielle, sera valorisée.

Problème - Convexité et orthogonalité

Ce problème comporte 5 parties qui sont à effectuer dans l'ordre, car elles ne sont pas indépendantes.

I) Projection sur un convexe fermé

Soit $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.
Soit C une partie non-vide, convexe et fermée de E et $x \in E$, considérons :

$$d(x,C) = \inf_{h \in C} \|x - h\|$$

1. Montrer qu'il existe un unique $\text{proj}_C(x) \in H$ tel que $d(x,C) = \|x - \text{proj}_C(x)\|$, que nous appellons projection de x sur C.
   On pourra, pour l'unicité, utiliser l'identité du parallélogramme.
2. Montrer que si $y \in C$ $y = \text{proj}_C(x)$ si et seulement si $\langle x - y \mid z - y \rangle \leqslant 0$ pour tout $z \in C$.
   On pourra introduire l'application $q : t \longmapsto \|x - (1-t)y - tz\|^2$

3. Montrer que pour tous $(x_1, x_2) \in E \times E$, on a

$$\langle \mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2) \mid x_1 - x_2 \rangle \geqslant \|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\|^2$$

et en déduire que proj_C est continue.

II) Théorème de Carathéodory et enveloppe convexe d'un compact

On dit que $x \in E$ est une combinaison convexe des p éléments $x_1, \ldots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \text{ et } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

4. Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H.

On souhaite montrer que $\mathrm{Conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'*au plus* $n+1$ éléments de H.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, \ldots, x_p \in H$ avec $p \geqslant n+2$.

5. Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \ldots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$$

   On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$.

6. En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\mathrm{Conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
   On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0, i \in [\![1\,,p]\!]$ *pour* $\theta \in \mathbb{R}$ *bien choisi.*

7. Supposons maintenant que H est compacte. Montrer alors que $\mathrm{Conv}(H)$ est compacte.

III) Enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

8. Montrer que $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|_2)$.

9. Montrer que $\text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{B}$.
10. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{B}$ telle que M n'appartient pas à $\text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$. On note $N = \text{proj}_{\text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))}(M)$ défini à la partie I pour la norme $\|.\|_1$, et on pose $A = (M-N)^\top$.
    (a) Montrer qu'on peut écrire $A = US$ avec $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
    (b) Montrer que pour tout $V \in \text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$, $\text{Tr}(AV) \leqslant \text{Tr}(AN) < \text{Tr}(AM)$. En déduire que $\text{Tr}(S) < \text{Tr}(USM)$.
    (c) Montrer que $\text{Tr}(MUS) \leqslant \text{Tr}(S)$.
11. Déterminer finalement $\text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

IV) Points extrémaux d'une partie convexe, cas particuliers

Si H est une partie convexe non-vide de E, nous dirons que $x \in H$ est un point extrémal de H si :

$$\forall (y, z, \lambda) \in H^2 \times \left]0\,, 1\right[\,, x = (1-\lambda)y + \lambda z \Rightarrow y = z$$

On notera $\text{Ext}(H)$ l'ensemble des points extrémaux de A.

12. Soit $H = \text{Conv}\left\{\{(0,0,1),(0,0,-1)\} \cup \{(1+\cos\theta, \sin\theta, 0), \theta \in [0\,, 2\pi]\}\right\}$. Montrer que $\text{Ext}(H)$ est non-vide et n'est pas fermée.
13. On souhaite montrer que $\text{Ext}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
    (a) Montrer que si $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $U = \dfrac{1}{2}(V + W)$ avec $V, W \in \mathcal{B}$, alors montrer que U est extrémal dans $\mathcal{B}$.
    (b) Soit $U \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on peut écrire $A = PDQ$, avec $P, Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs ou nuls.
    (c) Montrer que pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$, $d_i \leqslant 1$ et qu'il existe $j \in [\![1\,, n]\!]\,, d_j < 1$.
    (d) Montrer que U n'est pas extrémale, et conclure.
14. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $B_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices. Notons $P_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de permutation, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de la forme $(\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
    (a) Montrer que $B_n(\mathbb{R})$ est convexe, fermé et borné.
    (b) Montrer que $P_n(\mathbb{R}) \subseteq \text{Ext}(B_n(\mathbb{R}))$.

(c) Montrer la réciproque. *On pourra pour cela considérer un élément* $P = (p_{i,j}) \in B_n(\mathbb{R})$ *qui n'est pas une matrice de permutation, et en premier lieu trouver une suite d'indices* (i_k, j_k) *de* $[\![1\,,n]\!]^2$ *telle que* $p_{i_k,j_k}, p_{i_{k+1},j_k} \in \,]0\,,1[$.

V) *Plus difficile* - Points extrémaux d'une partie convexe, cas général

A) Une partie convexe est une intersection de demi-espaces fermés

Soient C et D deux parties non-vides convexes et fermées de E, telle que $C \cap D = \varnothing$ et D soit bornée.

15. Montrer que $D - C$ est une partie convexe fermée de E ne contenant pas 0.
16. Montrer qu'il existe $p \in E$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall (x, y) \in C \times D, \langle p \mid x\rangle \leqslant \langle p \mid y\rangle - \varepsilon$$

17. Soit $\sigma_C : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$\sigma_C(p) = \sup_{x \in C} \langle p \mid x\rangle$$

Montrer que

$$C = \{x \in E \mid \forall p \in E, \langle p \mid x\rangle \leqslant \sigma_C(p)\}$$

B) Démonstration du cas général

18. Soit $p \in E$, posons

$$C_p = \{x \in C \mid \forall y \in C, \langle p \mid x\rangle \geqslant \langle p \mid y\rangle\}$$

Montrer alors que C_p est non-vide, convexe et fermée et que $\mathrm{Ext}(C_p) \subseteq \mathrm{Ext}(C)$.

19. Montrer que $\mathrm{Ext}(C)$ est non-vide. *On pourra se ramener au cas où* $0 \in C$ *et raisonner sur la dimension de* C.
20. Montrer que $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(C)) \subseteq C$.
21. (a) Montrer que $K_p \subseteq \mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(K))$.

    (b) Montrer que $\forall y \in C, \forall p \in E, \langle p \mid y\rangle \leqslant \sigma_{\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(C))}(p)$.

    (c) Conclure enfin que $C = \mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(C))$.