DM5 - Théorème d'ASCOLI

L. TINTINAGLIA

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{K}$. *On suppose de plus que* F *est de dimension finie. On considère* $K \subset E$ *une partie de* E, *et* A *une partie de* $\mathcal{C}^0(K, F)$. *Ainsi,* A *est un ensemble dont les éléments sont des fonctions continues de* K *dans* F.

Définitions et notations

- *On dit que* A *est équicontinue en* $x \in K$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\quad \forall f \in A,\ \forall y \in K,\quad \|y - x\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

- *On dit que* A *est équicontinue sur* K *si* A *est équicontinue en tout* $x \in K$.
- *On dit que* A *est uniformément équicontinue sur* K *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\quad \forall f \in A,\ \forall (x, y) \in K^2,\quad \|y - x\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

  Ainsi, contrairement à une partie A *équicontinue sur* K, *on impose de plus l'indépendance de* η *vis-à-vis de* x.
- *Une suite de Cauchy* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ *dans l'e.v.n.* F *est une suite vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant N,\quad \forall p \geqslant N,\quad \|x_n - x_p\|_F \leqslant \varepsilon.$$

- *Si nous ne l'avons pas encore vu en cours au moment où vous faites ce devoir, vous pouvez utiliser sans preuve le fait que toutes les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes.*

Partie I – Complétude de F

On suppose que $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy de* F. *On rappelle que* F *est de dimension finie.*

1. Montrer que (u_n) est bornée.
2. En déduire que (u_n) admet une valeur d'adhérence dans F
3. Montrer que si φ et ψ sont deux extractrices, $u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)} \longrightarrow 0$.
4. En déduire que (u_n) converge.

Ainsi, les suites de Cauchy de F *sont convergentes. On dit que* F *est complet.*

Partie II – Théorème de Heine pour l'équicontinuité

On suppose que K *est une partie compacte de* E, *et que* $A \subset \mathcal{C}^0(K, F)$ *est équicontinue sur* K. *Nous allons montrer dans cette partie que* A *est uniformément équicontinue, ce qui constitue une généralisation du théorème de Heine. Nous raisonnons par l'absurde, en supposant que* A *n'est pas uniformément équicontinue.*

5. Monter qu'il existe ε, deux suites $(\widetilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widetilde{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $K^{\mathbb{N}}$, et une suite $(\widetilde{f_n}) \in A^{\mathbb{N}}$ (qu'on se donne pour la suite) telles que
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \|\widetilde{x_n} - \widetilde{y_n}\|_E \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \|\widetilde{f_n}(\widetilde{x_n}) - \widetilde{f_n}(\widetilde{y_n})\|_F > \varepsilon.$$
6. En déduire qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K^{\mathbb{N}}$, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, et $x \in K$, tels que
$$\lim x_n = \lim y_n = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad \|f_n(x_n) - f_n(y_n)\|_F > \varepsilon.$$
7. En utilisant l'équicontinuité de A en x, montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\|_F \leqslant \varepsilon$ et conclure.

Partie III – Précompacité et séparabilité

On suppose encore que K est compact.

8. Montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe une famille finie $(a_i)_{i\in I} \in E^I$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} B(a_i, \eta)$. On dit que K est précompact.
   Indication : raisonner par l'absurde et construire par récurrence une suite (x_n) telle que pour tout $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| \geqslant \eta$. On pourra pour cela considérer à chaque étape l'union des boules de rayon η centrées en chaque x_i.
9. En déduire qu'il existe une famille $(x_i)_{i\in I} \in K^I$ au plus dénombrable, dense dans K. On dit que K est séparable.
   Indication : prendre des η de plus en plus petites, et un point de K dans chaque boule qui rencontre K.

Partie IV – Théorème d'Ascoli, sens direct

On démontre dans la fin de ce problème un cas particulier du théorème d'Ascoli.
On suppose que K est compact, et on rappelle que F est de dimension finie. On muni $\mathcal{C}^0(K,F)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme, et on considère $A \subset \mathcal{C}^0(K,F)$. La version (affaiblie) du théorème d'Ascoli que nous démontrons affirme que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overline{A}$ est une partie compacte de $\mathcal{C}^0(K,F)$

(ii) A est équicontinue sur K, et bornée (au sens de $\|\cdot\|_\infty$).

Nous démontrons dans cette partie le sens direct, c'est-à-dire $(i) \implies (ii)$. On suppose donc que $\overline{A}$ est une partie compacte de $\mathcal{C}^0(K,F)$.

10. Montrer que A est bornée.
11. On suppose par l'absurde que A n'est pas équicontinue.
    (a) Montrer l'existence de $x \in K$, de $\varepsilon > 0$, et de deux suites $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in K^n$ tels que :
    $$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad \|f_n(x_n) - f_n(x)\|_F > \varepsilon.$$
    (b) En déduire l'existence d'une suite (y_n), extraite de (x_n), et d'une application $f \in \overline{A}$, telle que
    $$y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad \|f(y_n) - f(x)\|_F > \frac{\varepsilon}{2}.$$
    (c) La suite (y_n) étant celle de la question précédente, montrer qu'il existe une application $g \in A$ telle que
    $$\forall n \in \mathbb{N},\quad \|g(y_n) - g(x)\|_F > \frac{\varepsilon}{4},$$
    et conclure.

Partie V – Théorème d'Ascoli, sens réciproque

On suppose dans cette partie que A est bornée et équicontinue, et on montre qu'alors $\overline{A}$ est compacte.

13. Montrer qu'on a l'équivalence entre :
    (i) $\overline{A}$ est compact ;
    (ii) Toute suite $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans $\mathcal{C}^0(K,F)$.
    Pour la réciproque, étant donné $(g_n) \in \overline{A}^{\mathbb{N}}$, on pourra introduire $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|g_n - f_n\|_\infty \longrightarrow 0$.
14. Montrer que $\{f(x),\ \ f \in A,\ x \in K\}$ est une partie bornée de F.
15. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K, telle que $D = \{x_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{K}$, ce qui existe d'après la partie III.
    Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_{\varphi(n)}(x_p)$ converge dans K.
    Indication : Construire des extractrices (φ_p) telles que pour tout $p \in \mathbb{N}$, et tout $k \in [\![0,p]\!]$, $(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)}(x_k))$ converge, puis définir pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$.
16. Soit φ telle que dans la question précédente. Pour tout $x \in D$, on note $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x)$. Cela définit donc une application $f : D \to F$, telle que $((f_{\varphi(n)})_{|D})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
    Justifier que f est uniformément continue sur D.
    On pourra se servir des résultats de la partie II.
17. Soit $(x_n) \in D^n$ telle que $x_n \longrightarrow x \in K$. Montrer que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy, et en déduire qu'elle converge
18. Montrer que f se prolonge sur K en une fonction continue sur K, qu'on note encore f. Que peut-on dire de la continuité uniforme de f ?
19. Monter que $f_{\varphi(n)} \longrightarrow f$ dans $(\mathcal{C}^0(K,F), \|\cdot\|_\infty)$, et conclure.