DM3 - Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

L. TINTINAGLIA

Notations et définitions.

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q carrée inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.

A étant un élément de $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, on appelle noyau de A , noté $\text{Ker}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$: $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$.

On appelle image de A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$, noté $\text{Im}(A)$: $\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})\}$.

Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in J, MA \in J.$$

Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in J, AM \in J.$$

Si J est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que J est un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne par I la matrice identité d'ordre n .

I) Une première application de la relation d'équivalence.

On considère une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, différente des constantes 0 et 1, telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, f(AB) = f(A)f(B).$$

1. Montrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A)$ est non nul.
2. A est une matrice de rang r , strictement inférieur à n .
 - (a) Montrer l'existence de $r + 1$ matrices, notées $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1 A_2 \dots A_{r+1}$ soit nul.
 - (b) En déduire que $f(A) = 0$.
3. Que peut-on en conclure pour l'application f ?
Donner un exemple d'une telle application.

II) Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit J un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $I \in J$, alors $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si J contient une matrice inversible alors $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. On suppose que J n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à J .
 - (a) Montrer que J contient la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - (b) Montrer l'existence de $n - r + 1$ matrices, notées $A_1, A_2, \dots, A_{n-r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 + \dots + A_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.
4. Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

III) Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.
On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : J_E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid E \text{ contient } \text{Im}(A)\}$.
Montrer que J_E est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit A un élément de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{(n,q)}(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{Im}(B)$ est contenue dans $\text{Im}(A)$. On veut montrer qu'il existe une matrice C appartenant à $\mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{R})$ telle que $B = AC$.
On fixe un supplémentaire S de $\text{Ker}(A)$ dans $\mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$.
 - (a) Justifier que l'application ϕ définie par $X \mapsto AX$ définit un isomorphisme de S dans $\text{Im}(A)$.
 - (b) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{(q,1)}(\mathbb{R})$.
Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q , d'un unique élément ε_i de S tel que

$$A\varepsilon_i = Be_i.$$
 - (c) Soit C l'élément de $\mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les matrices $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$.
On pose $C = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_q]$. Montrer que $B = AC$.
3. Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\text{Im}(A) + \text{Im}(B)$ contient $\text{Im}(C)$.
 - (a) On désigne par $D = (A, B)$ la matrice de $\mathcal{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B , c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières celles de B .
Montrer que $\text{Im}(D) = \text{Im}(A) + \text{Im}(B)$.
 - (b) En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathcal{M}_{(2n,n)}(\mathbb{R})$ telle que : $C = DW$.
 - (c) En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = AU + BV$.
4. Soit J un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que :
 $\forall M \in J, \text{rg}(M) \leq r$ et qu'il existe $M_0 \in J$ tel que $\text{rg}(M_0) = r$.
- (b) Soit M un élément quelconque de J . On suppose que $\text{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\text{Im}(M_0)$.
 En utilisant le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$, montrer l'existence d'un élément de J de rang strictement supérieur à r .
- (c) Dédire des questions précédentes que J est contenu dans $J_{\text{Im}(M_0)}$.
5. Montrer que $J = J_{\text{Im}(M_0)}$.

IV) Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$. On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
- $$J_E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Ker}(M) \text{ contient } E\}.$$
- Montrer que J_E est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. (a) On désigne par u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, v une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.
 On suppose que $\text{Ker}(v)$ contient $\text{Ker}(u)$.
 Montrer qu'il existe une application linéaire w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ tel que : $v = w \circ u$.
- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{(q,n)}(\mathbb{R})$ telles que $\text{Ker}(B)$ contient $\text{Ker}(A)$. Dédire de la question précédente qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{R})$ telle que $B = CA$.
3. Soient A , B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que $\text{Ker}(C)$ contient $\text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B)$.
 Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n , U et V , telles que $C = UA + VB$.
4. Déterminer les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.