DM2 - Théorèmes taubériens

L. Tintinaglia

Ce devoir est un sujet de concours de 4 heures, que j'ai raccourci, pour vous puissiez le traiter dans son intégralité : c'est un grand classique qu'il faut avoir déjà fait une fois avant les écrits.

Notations

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

A toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E, ce que l'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par

$$\forall n \geqslant 0, \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des écarts définie par

$$\forall n \geqslant 0, e_n = u_{n+1} - u_n$$

A toute série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par

$$\forall n \geqslant 0, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N,$$

et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes définie par

$$\forall n \geqslant 0, R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

A toute série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, de rayon de convergence $R > 0$, on associe sa somme f définie sur $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ par

$$\forall z \in D(0,R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

I) Lemme de Cesàro

Le but de cette partie est de démontrer le lemme de Cesàro, voir question 1, d'en donner des applications et d'établir certaines variantes puis des réciproques partielles.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell\right) \tag{Cesàro}$$

On admettra que le résultat reste valable pour $l = \pm\infty$.

Applications

2. Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$ puis en donner un équivalent à l'aide d'une comparaison série-intégrale.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \,]0\,,+\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \,]0\,,+\infty[$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.
4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = ab$$

Réciproques partielles

5. Vérifier que la réciproque de (Cesàro) n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone}\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = l\right)$$

Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = \pm\infty$.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = l\right) \tag{Hardy faible}$$

Indication : on pourra démontrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k$$

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = l\right) \qquad \text{(Hardy fort)}$$

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} = \ell$ et $e_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(a) Soit $0 \leqslant n < m$. Démontrer que

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j$$

(b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leqslant n < m$, on a

$$|\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$$

et

$$|u_n - \ell| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}\left(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|\right)$$

(c) En déduire (Hardy fort). *Indication : on pourra prendre* $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ *avec un paramètre* $\alpha > 1$ *à choisir, où* $\lfloor x \rfloor$ *désigne la partie entière de* $x \in \mathbb{R}$.

II) Théorème d'Abel

Le but de cette partie est de démontrer le théorème d'Abel, voir question 9, d'établir certaines variantes et des réciproques partielles.

9. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et de somme f. On note, pour $\theta_0 \in \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0\,,\theta_0]\,, z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$

Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \qquad \text{(Abel)}$$

(a) Représenter dans le plan complexe Δ_{θ_0} pour $\theta_0 \in \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

(b) Démontrer (Abel) pour $R > 1$.

A partir de maintenant, on suppose que $R = 1$ et que $\sum a_n$ conerge, et on se donne $\theta_0 \in \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

(c) Démontrer que pour tous $N \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)$$

(d) En déduire que pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on a :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$$

(e) Soit $\varepsilon > 0$ Démontrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

(f) Démontrer qu'il existe $\rho(\theta_0) > 0$ tel que pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ de la forme $z = 1 - \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $0 < \rho < \rho(\theta_0)$, on a :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

En déduire (Abel).

10. Exhiber une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1 et de somme f, telle que $f(z)$ converge quand $z \to 1$, $|z| < 1$ et telle que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ ne converge pas.

11. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Soit $S \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer (Taubérien faible) :

$$\left(\lim_{\substack{x \to 1^- \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) = S \text{ et } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Rightarrow \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S \right)$$

Dans la suite de cette question on suppose que $\lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]0\,,1\right[$, on a

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1-x) \sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \frac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)}$$

(b) En déduire (Taubérien faible) en spécifiant $x = x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Il existe également une version "forte" du théorème de Tauber :

$$\left(\lim_{\substack{x \to 1^- \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) = S \text{ et } a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Rightarrow \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S \right)$$