

Correction du D118

Exercice (équations différentielles et calcul différentiel)

↳ difficile

1) Il s'agit de résoudre $X' = AX$ où $X: t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$$\text{et } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$

• A est diagonalisable car A est symétrique.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ -2 & X-1 & 2 \\ 1 & 2 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \quad \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ X & 2 & X-1 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 1 & 2 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= X(X^2 - 3X - 6)$$

$\Delta = 9 - 4 \cdot (-6) = 9 + 24 = 33$. Donc les racines sont $\frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$ selon C_1 en développant

$$= X \left(X - \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right) \right) \left(X + \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{2} \right) \right)$$

• Vecteurs propres: $C_1 = -C_3$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker A$ et ainsi

$$\ker A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$(A - \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right) I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & 2 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & -2 \\ -1 & -2 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}}_{=B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

On procède par élimination de Gauss-Jordan.

$$B \equiv_L \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & 2 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & -2 \\ -1 & -2 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_1 - \frac{2}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}} L_2 \quad \equiv_L \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{9+\sqrt{33}}{1+\sqrt{33}} & -\frac{2(3+\sqrt{33})}{1+\sqrt{33}} \\ -1 & -2 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}} L_1 \quad \equiv_L \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{9+\sqrt{33}}{1+\sqrt{33}} & -\frac{2(3+\sqrt{33})}{1+\sqrt{33}} \\ 0 & -\frac{2(3+\sqrt{33})}{1+\sqrt{33}} & -\frac{15+\sqrt{33}}{1+\sqrt{33}} \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2(3+\sqrt{33})}{9+\sqrt{33}} L_2 \quad \equiv_L \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{9+\sqrt{33}}{1+\sqrt{33}} & -\frac{2(3+\sqrt{33})}{1+\sqrt{33}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} \right) + 2y - z = 0 \\ -\frac{9+\sqrt{33}}{1+\sqrt{33}} y - \frac{2(3+\sqrt{33})}{1+\sqrt{33}} z = 0 \end{cases}$$

$$\text{En fixant } z = 1, \text{ on obtient } y = -\frac{\frac{15}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}}{2 \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} \right)} = -\frac{15+\sqrt{33}}{6+2\sqrt{33}}$$

$$\text{puis } x = -\frac{2 \left(\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} \right)}{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} \right)} = -2 \frac{9+\sqrt{33}}{(3+\sqrt{33})(1+\sqrt{33})} = -1$$

$$\text{Ainsi } \text{Ker} \left(A - \frac{3+\sqrt{33}}{2} I_3 \right) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{15+\sqrt{33}}{6+2\sqrt{33}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• De même,

$$\text{Ker}\left(A - \frac{3-\sqrt{33}}{2} I_3\right) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\frac{2\left(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)} \\ \frac{\frac{15}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}}{2\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{15-\sqrt{33}}{6-2\sqrt{33}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résolution: Ainsi en notant \mathcal{S} l'ensemble des solutions de $X' = AX$,

$$X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists (d, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \\ X: t \mapsto d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu e^{\frac{3+\sqrt{33}}{2}t} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{15+\sqrt{33}}{6+2\sqrt{33}} \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{\frac{3-\sqrt{33}}{2}t} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{15-\sqrt{33}}{6-2\sqrt{33}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) On cherche à résoudre $X' = AX + B$ où $X: t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• Équation homogène $X' = AX$

$$\rightarrow \chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$$

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } \text{rg}(A - 2I_2) = 1 \text{ et } \dim \text{Ker}(A - 2I_2) = 1.$$

Donc $E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On trigonalise A .

$$\text{Avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

→ Ainsi pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} = P e^{tT} P^{-1}$

$$\text{Mais } e^T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{n!} \text{ or } T^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

(réurrence rapide)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + I_2$$

$$= I_2 + \begin{pmatrix} e^2 - 1 & e^2 \\ 0 & e^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } e^{tA} = P e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$e^{tA} = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} z_0, z_0 \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Solution particulière: Par méthode de variation de la constante, une solution particulière est:

$$X_p(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} B(s) ds$$

$$= \underbrace{e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=e^{tA}} \int_0^t \underbrace{e^{-2s} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=e^{-sA}} \begin{pmatrix} \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -I(t) \end{pmatrix} \text{ où } I(t) = \int_0^t e^{-2s} \sin(s) ds.$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} -I(t) \\ -2I(t) \end{pmatrix} = -e^{2t} I(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } I(t) = \int_0^t \underbrace{e^{-2s}}_{u'(s)} \underbrace{\sin(s)}_{v(s)} ds \stackrel{\text{iPP}}{=} \left[-\frac{1}{2} e^{-2s} \sin s \right]_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{e^{-2s}}_{u'(s)} \underbrace{\cos(s)}_{v'(s)} ds$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2t} \sin(t) + \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{1}{2} e^{-2s} \cos(s) \right]_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2s} \sin(s) ds \right)$$

$$I(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} \sin(t) - \frac{1}{4} e^{-2s} \cos(t) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} I(t)$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} \left(\sin(t) - \frac{1}{2} \cos(t) \right) + \frac{1}{4} \right)$$

$$I(t) = e^{-2t} \left(-\frac{2}{5} \sin(t) - \frac{1}{5} \cos(t) \right) + \frac{1}{5}$$

Finalement,

$$X_p(t) = \left(\frac{2}{5} \sin(t) + \frac{1}{5} \cos(t) - \frac{1}{5} e^{2t} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

• Solutions. Ainsi $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + X_p$ donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \sin(t) + \frac{1}{5} \cos(t) - \frac{1}{5} e^{2t} \\ \frac{4}{5} \sin(t) + \frac{2}{5} \cos(t) - \frac{2}{5} e^{2t} \end{pmatrix}, \right. \\ \left. (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \left(z_0 - \frac{1}{5} \right) + \frac{2}{5} \sin(t) + \frac{1}{5} \cos(t) \\ e^{2t} \left(-y_0 + 2z_0 - \frac{2}{5} \right) + \frac{4}{5} \sin(t) + \frac{2}{5} \cos(t) \end{pmatrix}, \right. \\ \left. (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3) Analyse: Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(-x) = e^x \quad (*)$$

• Remarquons qu'une telle fonction est \mathcal{C}^2 . En effet,

$$f' : x \mapsto \underbrace{e^x}_{e^1} - \underbrace{f(-x)}_{e^1}$$

Ainsi f' est e^1 donc f est \mathcal{B}^2 .

• On redérive donc (x) : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) - f'(-x) = e^x \quad (da)$$

$$\text{Ainsi } f''(x) + f(x) = e^x + \cancel{f'(-x)} - \cancel{f'(-x)} + e^{-x}$$

$$f''(x) + f(x) = 2\text{ch}(x)$$

• Résolution de l'EDL :

$$\rightarrow \underline{f'' + f = 0} \text{ si et seulement si } f : x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) \\ \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\rightarrow \underline{\text{Solution particulière}} \text{ ch convient. En effet,} \\ \text{ch}'' + \text{ch} = \text{ch} + \text{ch} = 2\text{ch}.$$

• Donc $f : x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \text{ch}(x)$

Synthèse : Soit $f : x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \text{ch}(x)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \text{sh}(x) + \alpha \cos(x) \\ - \beta \sin(x) + \text{ch}(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\beta \text{ par identification.}$$

Ainsi les solutions sont :

$$y = \left\{ \alpha (\cos(x) - \sin(x)) + \text{ch}(x), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

4)a) → la bonne définition du lu est toujours assurée car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 + x^{2n} + y^{2n} \geq 0$$

De plus la série est à termes positifs par croissance

du \ln .

→ Si $|x| < 1$ et $|y| < 1$,

$$\ln(1+x^{2n}+y^{2n}) \underset{\text{concavité}}{\leq} x^{2n}+y^{2n} \text{ terme général d'une série CV}$$

donc $\sum_{n \geq 0} \ln(1+x^{2n}+y^{2n})$ converge.

→ Si $|x| > 1$ ou $|y| > 1$, on a divergence grossière.

Ainsi $D =]-1, 1[$

b) On montre que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D

↳ On applique le théorème \mathcal{C}^1 des séries de fonctions (à y fixé puis à x fixé) :

Soit $y \in]-1, 1[$.

→ la série $\sum_{n \geq 0} \ln(1+x^{2n}+y^{2n})$ converge simplement sur $] -1, 1[$.

→ les $f_n : x \mapsto \ln(1+x^{2n}+y^{2n})$ sont \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$;
avec pour $x \in] -1, 1[$,

$$f_n'(x) = \frac{2n x^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}}$$

→ Soit $a \in]0, 1[$. On montre que $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[-a; a]$. Pour $x \in [-a; a]$,

$$|f_n'(x)| \leq \frac{2n a^{2n-1}}{\underbrace{1+x^{2n}+y^{2n}}_{\geq 1}} \leq 2n a^{2n-1}$$

donc $\sup_{x \in [-a; a]} |f_n'(x)| \leq 2n a^{2n-1}$ terme général d'une série convergente.

Ainsi $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout

compact de $] -1, 1 [$.

Ainsi $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n}+y^{2n})$ est \mathcal{C}^1 à y fixé

De même $y \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n}+y^{2n})$ est \mathcal{C}^1 à x fixé

Attention, cela ne montre pas que $(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n}+y^{2n})$ est \mathcal{C}^1 ...

Il reste à montrer que $\begin{cases} \varphi : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \psi : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$ sont

continues sur D .

$$\text{Soit } h_n : (x, y) \mapsto \frac{2nx^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}}.$$

$\rightarrow h_n$ est continue sur $D =]-1, 1[^2$

\rightarrow De plus pour $a \in]0, 1[$,

$$\sup_{(x, y) \in [-a, a]^2} |h_n(x, y)| \leq 2na^{2n-1} \text{ t.g. d'une S.C.V}$$

Ainsi $\sum h_n$ converge normalement donc uniformément sur tout compact de $] -1, 1 [^2$.

On en déduit que $\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur D .

De même pour $\psi = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Ceci conclut : $(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n}+y^{2n})$ est \mathcal{C}^1 sur D .

5) On résout $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^3$.

On effectue pour cela le changement de variables

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = 2x + y \end{cases}$$

→ Notons $g : (u, v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{4}, \frac{u-v}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{4}, \frac{u-v}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{par règle de la chaîne}$$

$$= 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot 2 + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot 2 \right)$$

$$= 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 8 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

$$\rightarrow \text{Ainsi, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^3$$

$$\Leftrightarrow 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 16 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \left(\frac{u+v}{4}\right)^2 \left(\frac{u-v}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{16} \left(\frac{u+v}{4}\right)^2 \left(\frac{u-v}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1024} u^5 - \frac{v}{1024} u^4 - \frac{1}{512} u^3 v^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{512} u^2 v^3 + \frac{1}{1024} u v^4 - \frac{1}{1024} v^5 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6144} u^6 - \frac{1}{5120} u^5 v - \frac{1}{2048} u^4 v^2 + \frac{1}{1536} u^3 v^3 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2048} u^2 v^4 - \frac{1}{1024} v^5 u \right) + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(u, v) = \frac{1}{6144} u^6 v - \frac{1}{10240} u^5 v^2 - \frac{1}{6144} u^4 v^3 + \frac{1}{6144} u^3 v^4$$

$$+ \frac{1}{10240} u^2 v^5 - \frac{1}{5120} v^6 u + C v + D, \text{ où } C, D \in \mathbb{R}$$

Finalement l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{ (u, v) \mapsto \frac{1}{6144} u^6 v - \frac{1}{10240} u^5 v^2 - \frac{1}{6144} u^4 v^3 + \frac{1}{6144} u^3 v^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{10240} u^2 v^5 - \frac{1}{5120} v^6 u + C v + D, (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right.$$

Problème (Mines MP-MPI Maths 1 2024)



CONCOURS COMMUN MINES-PONTS 2024

Épreuve de mathématiques I, MP & MPI, trois heures

(corrigé)

Remarque. L'énoncé ne précise pas ce qu'est p . Nous supposons dans tout ce corrigé que c'est un entier (pour que $(\cos(t))^{2p+1}$ soit bien défini y compris lorsque le cosinus est strictement négatif), et plus précisément un entier naturel pour que $t \mapsto \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}$ soit continue sur $]0, +\infty[$, de sorte que l'intégrale de Dirichlet généralisée ait bien un sens (on en aura aussi besoin pour appliquer la formule du binôme de Newton à la question 17).

Partie I : Calcul d'une intégrale

1. Dans cette question et la suivante, je noterai f_θ la fonction de l'énoncé.

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Pour s'assurer que f_θ est bien définie sur $]0, +\infty[$, il suffit de vérifier que le dénominateur $1 + te^{i\theta}$ ne s'annule pas pour tout $t \in]0, +\infty[$. Or, si $t > 0$, alors l'égalité $te^{i\theta} + 1 = 0$ implique, en isolant 1 et en comparant les modules : $t = 1$. Ensuite :

$$e^{i\theta} + 1 = 0 \iff e^{i\theta} = -1 \iff \theta \equiv \pi \pmod{2\pi},$$

ce qui est impossible par hypothèse sur θ . Ainsi f_θ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Justifions son intégrabilité sur $]0, +\infty[$. L'application f_θ est continue sur cet intervalle en tant que quotient de fonctions continues dans le dénominateur ne s'annule pas. On a de plus :

$$|f_\theta(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} > 0$$

et la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est d'exposant $1 - x < 1$ donc intégrable sur $]0, 1]$. Par le théorème de comparaison des fonctions intégrables, l'application f_θ est intégrable sur $]0, 1]$.

Enfin, comme $e^{i\theta} \neq 0$ on a :

$$|f_\theta(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^{x-1}}{|te^{i\theta}|} = t^{x-2} = \frac{1}{t^{2-x}} > 0,$$

et comme $x \in]0, 1[$, on a : $2 - x \in]1, 2[$, donc en particulier la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{2-x}}$ est d'exposant $2 - x > 1$ donc intégrable sur $[1, +\infty[$. Par le théorème de comparaison des fonctions intégrables, l'application f_θ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Étant intégrable sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$, l'application f_θ est intégrable sur $]0, +\infty[$: d'où le résultat.

2. Nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (t, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[, \quad k(t, \theta) = f_\theta(t).$$

Alors :

— pour tout $t \in]0, +\infty[$, l'application $\theta \mapsto k(t, \theta)$ est de classe C^1 sur $] -\pi, \pi[$ et on a :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta) = t^{x-1} \times \left(-\frac{ite^{i\theta}}{(1 + te^{i\theta})^2} \right) = -ie^{i\theta} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2};$$

— pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, l'application $t \mapsto k(t, \theta)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par la question précédente ;

- pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, l'application $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$ par un argument semblable à celui de la question précédente ;
- pour tout $\beta \in]0, \pi[$, et tout $(t, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\beta, \beta[$ on a :

$$|1 + te^{i\theta}|^2 = |1|^2 + 2\operatorname{Re}(te^{i\theta}) + |te^{i\theta}|^2 = 1 + 2t \cos(\theta) + t^2, \quad (1)$$

et la parité du cosinus, ainsi que sa décroissance sur $[0, \beta]$, permettent d'écrire :

$$|1 + te^{i\theta}|^2 \geq 1 + 2t \cos(\beta) + t^2 = |1 + te^{i\beta}|^2 ;$$

on en déduit, toujours pour tout $(t, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\beta, \beta[$:

$$\left| \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta) \right| = \frac{t^x}{|1 + te^{i\theta}|^2} \leq \frac{t^x}{|1 + te^{i\beta}|^2}. \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

Justifions que l'application $\varphi : t \mapsto \frac{t^x}{|1 + te^{i\beta}|^2}$, qui est effectivement définie et continue sur $]0, +\infty[$ par les mêmes arguments que dans la question précédente (vu que $\beta \notin \{-\pi, \pi\}$), est intégrable sur cet intervalle. Elle est positive et on a :

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}} > 0, \quad \varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{x-2} = \frac{1}{t^{2-x}} > 0,$$

et comme $x \in]0, 1[$ on a : $-x < 0 < 1$, ainsi que : $2 - x > 1$. Les conditions d'intégrabilité des fonctions de Riemann au voisinage de 0 et $+\infty$ assurent donc, par comparaison, l'intégrabilité de φ sur $]0, +\infty[$. L'hypothèse de domination est bien vérifiée.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, d'une part l'application $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, et d'autre part r est de classe C^1 sur $] - \pi, \pi[$. De plus :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad r'(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta) dt = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt.$$

3. Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$ on a : $g(\theta) = e^{ix\theta} r(\theta)$. Ainsi g est de classe C^1 sur $] - \pi, \pi[$ en tant que produit de fonctions de classe C^1 , et on a :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad g'(\theta) = ix e^{ix\theta} r(\theta) + e^{ix\theta} r'(\theta) = ie^{ix\theta} \left(xr(\theta) + \frac{1}{i} r'(\theta) \right).$$

Or, pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a par la question précédente :

$$xr(\theta) + \frac{1}{i} r'(\theta) = \int_0^{+\infty} \left(xt^{x-1} \cdot \frac{1}{1 + te^{i\theta}} + t^x \cdot \left(-\frac{e^{i\theta}}{(1 + te^{i\theta})^2} \right) \right) dt = \int_0^{+\infty} h'(t) dt,$$

donc : $\forall \theta \in]-\pi, \pi[, g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) dt$, ce qu'il fallait démontrer.

Le fait que l'intégrale ci-dessus converge (en tant que somme d'intégrales convergentes) assure *a priori* que h admet une limite finie en 0 et $+\infty$. Calculons-les. Comme $x > 0$, on a : $\lim_{t \rightarrow 0} t^x = 0$, et de plus : $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + te^{i\theta}) = 1$, donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0.$$

(Remarque : l'énoncé demande de calculer $h(0)$ alors que h a été définie sur $]0, +\infty[$...)

Ensuite, comme $x - 1 < 0$:

$$|h(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{x-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0,$$

donc : $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} |h(t)| = 0$. On en déduit :

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) dt = ie^{ix\theta} [h(t)]_0^{+\infty} = 0,$$

donc g est de dérivée nulle sur l'intervalle $] - \pi, \pi[$: on en déduit que c'est une fonction constante, d'où le résultat.

4. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Comme g est constante sur $] - \pi, \pi[$, on a : $g(\theta) = g(-\theta)$, donc par la formule d'Euler :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{2i} (g(\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}) = \frac{1}{2i} (g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}).$$

Or par définition de g on a :

$$g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^{x-1}}{1+te^{-i\theta}} - \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^x (e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{|1+te^{i\theta}|^2} dt.$$

Toujours par la formule d'Euler, on a : $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$. Par l'identité remarquable (1) démontrée à la question 2, on a donc :

$$g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta} = 2i \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2 + 2t \cos(\theta) + 1} dt,$$

d'où le résultat :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2 + 2t \cos(\theta) + 1} dt.$$

5. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On a :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad t^2 + 2t \cos(\theta) + 1 = (t + \cos(\theta))^2 + 1 - (\cos(\theta))^2 = (t + \cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2$$

(expression que l'on pouvait aussi déduire de : $|1 + te^{i\theta}|^2 = |e^{-i\theta} + t|^2$), et comme $\sin(\theta) \neq 0$ on peut écrire, par la question précédente :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{\left(\frac{t + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2 + 1} dt.$$

Faisons alors le changement de variable affine $u = \frac{t + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$. Il en résulte le résultat voulu :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} \int_{\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}^{+\infty} \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{u^2 + 1} \sin(\theta) du = \int_{\cotan(\theta)}^{+\infty} \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2} du.$$

6. Suivons l'énoncé et utilisons le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Posons :

$$\forall (\theta, u) \in]0, \pi[\times \mathbf{R}, \quad \gamma(u, \theta) = \begin{cases} \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2} & \text{si } u \geq \cotan(\theta), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La distinction de cas est faite pour se ramener à un intervalle fixe, puisqu'on a :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(u, \theta) du.$$

Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- pour tout $\theta \in]0, \pi[$, l'application $u \mapsto \gamma(u, \theta)$ est continue (par morceaux) sur \mathbf{R} ;
- pour tout $u \in \mathbf{R}$ et pour tout $\theta \in]0, \pi[$ au voisinage de π on a $\cotan(\theta) \leq u$ (puisque $\cotan(\theta) = \frac{u \sin(\theta) - \cos(\theta)}{1 + u^2}$ tend vers $-\infty$ quand θ tend vers π par valeurs inférieures), donc $\gamma(u, \theta) = \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2}$ pour θ au voisinage de π , ce qui permet de déduire :

$$\forall u \in \mathbf{R}, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \gamma(u, \theta) = \frac{1}{1 + u^2},$$

et l'application $u \mapsto \frac{1}{1 + u^2}$ est continue (par morceaux) sur \mathbf{R} ;

- montrons l'hypothèse de domination ; si $(\theta, u) \in]0, \pi[\times \mathbf{R}$ vérifie $u \geq \cotan(\theta)$, alors :

$$u \sin(\theta) - \cos(\theta) \geq \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(\theta) - \cos(\theta) \geq 0,$$

donc : $|u \sin(\theta) - \cos(\theta)| = u \sin(\theta) - \cos(\theta)$, puis :

$$|\gamma(u, \theta)| = \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2} = \frac{(\sqrt{1 + u^2})^x}{1 + u^2} \left(\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \sin(\theta) - \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \cos(\theta) \right)^x ;$$

comme : $\left(\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \right)^2 = 1$, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} = \cos(\alpha), \quad \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} = \sin(\alpha),$$

ce qui permet enfin d'écrire :

$$\begin{aligned} |\gamma(u, \theta)| &= \frac{1}{(1 + u^2)^{1 - \frac{x}{2}}} (\cos(\alpha) \sin(\theta) - \sin(\alpha) \cos(\theta))^x = \frac{1}{(1 + u^2)^{1 - \frac{x}{2}}} (\sin(\theta - \alpha))^x \\ &\leq \frac{1}{(1 + u^2)^{1 - \frac{x}{2}}} \end{aligned}$$

tandis que si $u \leq \cotan(\theta)$ alors $\gamma(u, \theta) = 0$ donc l'inégalité reste trivialement vérifiée ; ainsi :

$$\forall (\theta, u) \in]0, \pi[\times \mathbf{R}, \quad |\gamma(u, \theta)| \leq \frac{1}{(1 + u^2)^{1 - \frac{x}{2}}}. \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

Justifions que $\varphi : u \mapsto \frac{1}{(1 + u^2)^{1 - \frac{x}{2}}}$ est intégrable sur \mathbf{R} : elle est continue sur cet intervalle, et au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2-x}} > 0.$$

Comme $x \in]0, 1[$, on a : $2 - x > 1$, donc la fonction de Riemann $u \mapsto \frac{1}{u^{2-x}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par comparaison, il en est de même de φ , et par parité φ est intégrable au voisinage de $-\infty$ également, donc sur \mathbf{R} tout entier : l'hypothèse de domination est vérifiée.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) \sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \gamma(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2},$$

d'où le résultat.

Remarque. L'inégalité décisive $|u \sin(\theta) - \cos(\theta)| \leq \sqrt{1 + u^2}$ peut s'obtenir plus rapidement en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire usuel de \mathbf{R}^2 , avec les vecteurs $(u, -1)$ et $(\sin(\theta), \cos(\theta))$.

7. Une primitive de $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ étant l'arc tangente, la question précédente implique :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) \sin(x\theta) = [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Mais on a aussi, comme le sinus est continu sur \mathbf{R} et la fonction g constante sur $] - \pi, \pi[$ par la question 3 :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) \sin(x\theta) = g(0) \sin(x\pi) = \sin(x\pi) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

Par unicité de la limite, on conclut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Notons que $\pi x \in]0, \pi[$, donc le sinus est bien non nul.

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8. Par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

Effectuons le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans la seconde intégrale. Il est licite puisque la fonction inverse est de classe C^1 et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Alors :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = - \int_1^0 \frac{u^{1-x}}{1+\frac{1}{u} u^2} du = \int_0^1 \frac{u^{1-x}}{u(1+u)} du = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} du.$$

On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} du = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t} \right) dt,$$

d'où le résultat.

9. Pour tout $t \in]0, 1[$, comme $|-t| < 1$, on a : $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k$. On aimerait alors écrire, sous réserve de validité :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 t^{x-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k dt \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k t^{x+k-1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}.$$

Pour avoir le résultat voulu, il suffit donc de justifier (*). Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée avec la suite des sommes partielles, puisqu'on peut vérifier que les deux autres théorèmes d'intégration terme à terme ne s'appliquent pas ici. Posons :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall t \in]0, 1[, \quad f_k(t) = (-1)^k t^{x+k-1}.$$

Alors :

- pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'application f_k est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$;
- par convergence des séries géométriques de raison strictement entre -1 et 1 , la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge simplement sur $]0, 1[$, et sa somme $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est bien sûr continue (par morceaux) sur $]0, 1[$;

— pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $t \in]0, 1[$, on a :

$$\left| \sum_{k=0}^N f_k(t) \right| = \left| t^{x-1} \sum_{k=0}^N (-t)^k \right| = t^{x-1} \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1+t} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t}, \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application $\varphi : t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$, intégrable en vertu de l'équivalent : $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} > 0$, et de l'inégalité $1-x < 1$. Elle est donc aussi intégrable sur $]0, 1[$.

Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^N f_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt,$$

et la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^N f_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \int_0^1 f_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k},$$

d'où le résultat :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}.$$

10. Par la question précédente, appliqué à $1-x \in]0, 1[$, on a :

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-x}.$$

La question 8 donne donc le résultat voulu :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-x}.$$

Pour s'accorder aux notations de l'énoncé, on nomme l'indice de sommation n dans ce qui suit.

11. En effectuant le changement d'indice $n \mapsto n+1$ dans la seconde somme ci-dessus, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{n+x},$$

donc par la question 7 on a le résultat :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}.$$

12. Soit $y \in]0, \pi[$. Posons : $x = \frac{y}{\pi} \in]0, 1[$. Par la question précédente :

$$\frac{\pi}{\sin(y)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2} = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y}{\pi \left(n^2 - \frac{y^2}{\pi^2} \right)}.$$

Il suffit alors de multiplier cette relation par $\frac{\sin(y)}{\pi}$ pour avoir :

$$1 = \frac{\sin(y)}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{\pi^2 \left(n^2 - \frac{y^2}{\pi^2} \right)} = \frac{\sin(y)}{y} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{-n^2 \pi^2 + y^2},$$

d'où le résultat en réarrangeant les termes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2 \pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}.$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13. Comme je le disais en début de corrigé, je suppose que p est un entier naturel pour traiter cette question et les suivantes.

L'application $t \mapsto \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a :

$$0 \leq \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \leq \frac{2}{t^2},$$

et l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ (car l'exposant est $2 > 1$) assure, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$ converge.

Pour t au voisinage de 0, on écrit :

$$\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 + O_{t \rightarrow 0}(t^2)\right)^{2p+1}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 + (2p+1) \times O_{t \rightarrow 0}(t^2)\right)}{t^2} = O_{t \rightarrow 0}(1),$$

et $t \mapsto 1$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$ et en particulier sur $]0, 1]$. Par comparaison, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$ converge.

Ceci achève de démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$ converge.

Passons à la deuxième partie de la question. Nous allons intégrer par parties, en intégrant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ et en dérivant $t \mapsto 1 - (\cos(t))^{2p+1}$, dont la dérivée est $t \mapsto (2p+1)(\cos(t))^{2p} \sin(t)$. Comme, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} = 0,$$

et par la relation de comparaison plus haut :

$$\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} = t \cdot \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} = O_{t \rightarrow 0}(t),$$

on a : $\lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} = 0$, la formule de l'intégration par parties assure que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{(2p+1)(\cos(t))^{2p} \sin(t)}{t} dt$$

sont de même nature, donc la seconde intégrale converge aussi et on a de plus :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt &= \left[\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{(2p+1)(\cos(t))^{2p} \sin(t)}{t} dt \\ &= (2p+1) \int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

14. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On effectue le changement de variable affine $u = t - n\pi$. On a :

$$\int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du.$$

Par la relation de Chasles et le changement de variable $u \mapsto -u$, comme le sinus est impair, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{-u - n\pi} du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} (-1)^n \sin(u) \left(\frac{1}{u - n\pi} + \frac{1}{u + n\pi} \right) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} (-1)^n \sin(u) \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2} du, \end{aligned}$$

d'où le résultat, quitte à renommer u en t :

$$\int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} dt.$$

15. On utilise d'abord la relation de Chasles. Comme l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge par la question 13, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt \stackrel{(q.14)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} dt.$$

Justifions qu'il est possible d'intervertir somme et intégrale, par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment. Posons :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f_n(t) = (\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Alors :

- l'application f_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (on a $\pm n\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $n \geq 1$);
- pour tout entier $n \geq 1$ et tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$|f_n(t)| = (\cos(t))^{2p} \frac{2t|\sin(t)|}{|t^2 - n^2\pi^2|} \leq \frac{\pi}{n^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{\pi}{n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}},$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} < +\infty,$$

où la finitude de la dernière somme découle du théorème de comparaison des séries à termes positifs, appliqué à l'équivalent $\frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$, et de la convergence des séries de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1; on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, d'une part la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n$ converge, et d'autre part :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n.$$

C'est-à-dire, en reprenant le calcul amorcé en début de question :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt,$$

d'où le résultat.

16. Par la question précédente et la question 12, qu'on applique avec $y = t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(1 - \frac{\sin(t)}{t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

d'où le résultat par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} dt.$$

17. Soit $t \in \mathbf{R}$ (l'énoncé ne précise pas ce qu'est t). Par la formule d'Euler et la formule du binôme de Newton, on a :

$$(\cos(t))^{2p} = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (e^{it})^{2p-k} (e^{-it})^k = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)}, \quad (2)$$

et donc :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)} + \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} + \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)}.$$

Or, par le changement d'indice $k \mapsto 2p - k$, on a :

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{2p-k} e^{2it(k-p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{-2it(p-k)}$$

donc :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} (e^{2it(p-k)} + e^{-2it(p-k)}) + \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}.$$

Par la formule d'Euler, cela donne le résultat voulu :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right).$$

18. On a, par les questions 13, 16 et la précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt &= (2p+1) \int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt \\ &= \frac{2p+1}{2^{2p}} \left(\frac{\pi}{2} \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t) dt \right). \end{aligned}$$

Or, si $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t) dt = \left[\frac{\sin(2(p-k)t)}{2(p-k)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin((p-k)\pi)}{2(p-k)} = 0,$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt = \frac{2p+1}{2^{2p}} \cdot \frac{\pi}{2} \binom{2p}{p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$

d'où le résultat.

Remarque. L'énoncé se complique inutilement la vie en nous faisant montrer l'identité de la question précédente. En remarquant, grâce aux différentes symétries du cosinus, que l'on a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(t))^{2p} dt$, et en intégrant la relation (2) démontrée à la question précédente nous avons immédiatement le résultat, puisque $\int_0^{\pi} e^{2it\ell} dt$ est nulle pour $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et égale à $\ell = 0$ sinon, par un calcul immédiat exploitant la π -périodicité de $t \mapsto e^{2it}$.

Partie IV : Calcul de $E(|S_n|)$

19. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Il est clair que l'on a :

$$\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad E(X_k) = 0, \quad V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = E(1) = 1.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = 0,$$

et par indépendance des variables X_k :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n.$$

D'où le résultat.

20. On a :

$$\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T).$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos(S)\cos(T)) - E(\sin(S)\sin(T)).$$

Or S et T sont indépendantes, donc par le lemme des coalitions il en est de même de $\cos(S)$ et $\cos(T)$, puis de $\sin(S)$ et $\sin(T)$. On en déduit :

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)) - E(\sin(S))E(\sin(T)).$$

Or T et $-T$ ont même loi, donc $\sin(T)$ et $\sin(-T) = -\sin(T)$ également. Deux variables ayant même loi ont aussi même espérance, d'où :

$$E(\sin(T)) = E(-\sin(T)) = -E(\sin(T)).$$

On en déduit : $E(\sin(T)) = 0$, d'où le résultat :

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)).$$

21. Soient $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbf{R}$. Au vu de la définition des X_k , il est clair que tX_k et $-tX_k$ ont même loi pour tout $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. De plus, par le lemme des coalitions, $T = tX_{n+1}$ et $S = t \sum_{k=1}^n X_k = tS_n$ sont indépendantes. Cela permet d'écrire, par la question précédente :

$$E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(S+T)) = E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_{n+1})).$$

Comme tX_{n+1} a même loi que tX_1 , on a donc :

$$E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_1)).$$

Par le théorème de transfert :

$$E(\cos(tX_1)) = \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\cos(-t)}{2} = \cos(t).$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad E(\cos(tS_{n+1})) = \cos(t)E(\cos(tS_n)).$$

Autrement dit : la suite $(E(\cos(tS_n)))_{n \geq 1}$ est géométrique et de raison $\cos(t)$. On conclut :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad E(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^{n-1}E(\cos(tS_1)) = (\cos(t))^{n-1}E(\cos(tX_1)) = (\cos(t))^n.$$

22. On a :

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2\text{signe}(a)|a|b + b^2 = |a|^2 + 2\text{signe}(a)|a|b + (\text{signe}(a)b)^2,$$

c'est-à-dire :

$$|a + b|^2 = (|a| + \text{signe}(a)b)^2.$$

On en déduit que les réels $|a + b|$ et $|a| + \text{signe}(a)b$ sont égaux ou opposés. L'hypothèse $|a| \geq |b|$ assure que $|a| + \text{signe}(a)b$ est positif. Or $|a + b|$ l'est aussi, donc :

$$|a + b| = |a| + \text{signe}(a)b.$$

Appliqué à $a = S_{2n-1}(\omega)$ et $b = X_{2n}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ (dont il faut normalement s'assurer qu'elles vérifient les hypothèses sur a et b : voir plus bas), cela donne :

$$|S_{2n}| = |S_{2n-1} + X_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}, \tag{3}$$

donc par linéarité de l'espérance :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad E(|S_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|) + E(\text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}) = E(|S_{2n-1}|).$$

Or X_1, \dots, X_{2n} sont indépendantes, donc par le lemme des coalitions il en est de même de X_{2n} et $\text{signe}(S_{2n-1})$. On en déduit :

$$E(\text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}) = E(\text{signe}(S_{2n-1})) E(X_{2n}) \stackrel{(q.19)}{=} 0,$$

d'où le résultat :

$$E(|S_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|).$$

Il reste à justifier que les choix $a = S_{2n-1}(\omega)$ et $b = X_{2n}(\omega)$ sont licites. C'est-à-dire : justifions que $S_{2n-1}(\omega)$ est non nul et que : $|S_{2n-1}(\omega)| \geq |X_{2n}(\omega)|$. On a : $S_{2n-1}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n-1} X_k(\omega)$, et comme les $X_k(\omega)$ sont dans $\{-1, 1\}$, on a :

$$S_{2n-1}(\omega) \equiv \sum_{k=1}^{2n-1} 1 \pmod{2} \equiv 2n - 1 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2},$$

donc $S_{2n-1}(\omega)$ ne peut pas être nul (c'est une façon comme une autre de justifier que, pour qu'une somme de 1 et de -1 soit nulle, il faut autant de 1 que de -1 , ce qui est impossible si on somme un nombre impair de termes). Comme $S_{2n-1}(\omega)$ est à valeurs entières, ceci impose :

$$|S_{2n-1}(\omega)| \geq 1 = |X_{2n}(\omega)|,$$

d'où le résultat : la relation (3) est vraie.

23. Soit $s \in \mathbf{R}$. Comme chaque membre de l'égalité à démontrer est une fonction paire de s , il suffit de la démontrer pour $s \geq 0$.

Si $s = 0$, on a immédiatement : $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0 = \frac{\pi}{2}|0|$. Supposons donc $s > 0$.

Le changement de variable affine $u = st$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{(u/s)^2} \frac{du}{s} = s \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du.$$

Par la question 18 avec $p = 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du = \frac{\pi}{2},$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}s = \frac{\pi}{2}|s|.$$

D'où le résultat pour $s \geq 0$, et donc pour $s \in \mathbf{R}$ par parité.

24. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Par le théorème de transfert, on a :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) = \sum_{s \in S_n(\Omega)} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt \right) \mathbf{P}(S_n = s) = \sum_{s \in S_n(\Omega)} \frac{\pi}{2}|s| \cdot \mathbf{P}(S_n = s),$$

et donc, encore par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) = \frac{\pi}{2} \mathbf{E}(|S_n|).$$

Mais on a aussi, par le théorème d'intégration terme à terme positif, dont les hypothèses découlent aisément des questions précédentes (intégrabilité du terme général, etc.) :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{s \in S_n(\Omega)} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} \mathbf{P}(S_n = s) \right) dt.$$

Par le théorème de transfert, cela donne aussi :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) = \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left(\frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} \right) dt.$$

En comparant les deux expressions de $\mathbf{E} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right)$ obtenues, on a donc :

$$\mathbf{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left(\frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} \right) dt.$$

Par linéarité de l'espérance et la question 21, on conclut :

$$\mathbf{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathbf{E}(\cos(tS_n))}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^n}{t^2} dt.$$

25. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. En combinant les questions 18 (avec $p = n - 1$), 22 et la précédente, on a immédiatement le résultat voulu :

$$\mathbf{E}(|S_{2n}|) = \mathbf{E}(|S_{2n-1}|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2n-1}}{t^2} dt = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2} ((n-1)!)^2}.$$