

Corrigé du DM7

L. TINTINAGLIA

Exercice - Probabilités

d'après X-ENS 2024 MP-MPI A

On associe à chacune des n vestes un numéro compris entre 1 et n . On modélise donc chaque veste par un entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et la répartition finale des vestes par la variable aléatoire σ suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Ainsi l'évènement $(X = k)$ est la probabilité que σ ait k point fixes. Il s'agit alors d'une reprise d'une partie du DM6 ! Avec les notations du DM6, Z_n représente X ici. On en déduit alors, par la question (8a),

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

On en déduit alors $\mathbb{E}(X) = 1$ (question 8c).

Le calcul de la variance n'est pas difficile en utilisant la même astuce que dans le DM (utilisée pour le calcul de l'espérance) : $X = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ où $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma(1) = k\}$ Alors, en notant que

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n},$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(\mathbb{1}_{A_i}) + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \text{cov}(\mathbb{1}_{A_k}, \mathbb{1}_{A_l})$$

Or,

$$\mathbb{V}(\mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}^2) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i})^2 = \mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_i}) - \mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_i})^2 = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

et pour $k < l$,

$$\text{cov}(\mathbb{1}_{A_k}, \mathbb{1}_{A_l}) = \mathbb{P}(A_k \cap A_l) - \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_l) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}$$

Finalement

$$\mathbb{V}(X) = 1 - \frac{1}{n} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \right) = 1$$

Problème - Convexité et orthogonalité

adapté de X-ENS 2022 PSI et Mines MP 2013 2

I) Projection sur un convexe fermé

Voir (X PSI 2022), questions 1 à 3

II) Théorème de CARATHÉODORY et enveloppe convexe d'un compact

Voir (Mines MP 2013), questions 12 à 15

III) Enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Voir (Mines MP 2013), questions 16 à 20

IV) Points extrémaux d'une partie convexe, cas particuliers

◁ Question 12 : Voir (X PSI 2022), question 11

◁ Question 13 : Voir (Mines MP 2013), questions 21 à 24

◁ Question 14 : Voir pages suivantes

- a) - Montrons que $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est convexe. Soient $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.
 Considérons $t \in [0, 1]$ et $C = (1-t)A + tB$. Montrons $C \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.
 → des coefficients de C sont clairement positifs.
 → Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n (1-t)a_{ij} + t b_{ij} = (1-t) \sum_{j=1}^n a_{ij} + t \sum_{j=1}^n b_{ij} \\ = 1-t+t = 1$$

et de même pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$.

$\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est donc convexe.

• Fermé: Soient les applications:

$$\text{pour } j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_j : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (m_{kl})_{1 \leq k, l \leq n} \mapsto \sum_{k=1}^n m_{kj} \end{cases}$$

$$\text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \psi_i : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (m_{kl}) \mapsto \sum_{l=1}^n m_{il} \end{cases}$$

$$\text{pour } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \xi_{i,j} : (m_{kl}) \mapsto m_{ij}$$

continues car linéaires en dimension finie. Ainsi

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = \bigcap_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \varphi_j^{-1}(\{1\}) \cap \psi_i^{-1}(\{1\}) \cap \xi_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}_+)$$

Fermé comme intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues.

• Borné: des normes étant équivalentes en dimension finie, considérons $\|\cdot\|_\infty$. Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

$$\|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |a_{ij}| \leq \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{ij} \leq 1 \text{ par positivité des } (a_{ij}).$$

donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est borné.

Soient $(A, B) \in D_n(\mathbb{R}^2)$ et $t \in]0, 1[$, tel que $A(1-t) + Bt = \pi_\sigma$
On note les propriétés immédiates vérifiées par M_σ :

- Soient $(i, j) \in \{1, n\}^2$. Alors $a_{ij}(1-t) + b_{ij}t = \delta_{i, \sigma(j)}$

$$\rightarrow \text{Si } i = \sigma(j), \quad \underbrace{a_{\sigma(j),j}}_{=0} (1-t) + \underbrace{b_{\sigma(j),j}}_{=0} t = 1 \quad \text{donc} \quad a_{ij} = b_{ij} = 1$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_n(R) \subseteq \text{Ext}(\mathcal{D}_n(R))}$

L. TINTINAGLIA

c) Soit $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas une matrice de permutation, montrons qu'elle n'est pas extrême

P étant bistochastique, $\begin{cases} \exists (i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p_{i_0 j_0} \in]0, 1[\\ \exists i_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_{i_1 j_0} \in]0, 1[\text{ car } \sum_{i=1}^n p_{i j_0} = 1 \\ \exists j_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_{i_0 j_1} \in]0, 1[\text{ car } \sum_{j=1}^n p_{i_0 j} = 1 \end{cases}$

On construit $(i_0, j_0, \dots, i_k, j_k)$ une suite d'indices de $\mathbb{N}_n^2$ tels que $p_{i_k j_k}, p_{i_{k+1} j_k} \in]0, 1[$ (cette suite est finie)

On dispose de $k < l$, $\begin{cases} i_k = i_l \\ j_k = j_l \end{cases}$ par principe des tiroirs.

Soit $l_0 = \min \{l \mid \exists k < l, i_k = i_l \text{ ou } j_k = j_l\}$. Par exemple, $j_{l_0} = j_{k_0}$

Quitte à commencer avec k_0 , on obtient une suite $(i_0, j_0, \dots, i_l, j_l)$

On pose $\Delta = (\delta_{ij})$ où $\begin{cases} \delta_{i_k j_k} = 1 \\ \delta_{i_k j_{k+1}} = -1 \\ \delta_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Δ vérifie $\sum_{j=1}^n \delta_{kj} = \sum_{i=1}^n \delta_{ik} = 0$.

Soit $0 < \varepsilon \leq \min \{p_{ij}, p_{ij} > 0\} \cup \{1 - p_{ij}, p_{ij} < 1\}$

Avec $\begin{cases} A = P - \varepsilon \Delta \\ B = P + \varepsilon \Delta \end{cases}$ les matrices "perturbées", $P = \frac{A+B}{2}$ n'est

pas extrême. Ainsi on conclut que $\text{Ext}(\mathcal{B}_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{\text{Ext}(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})}$$

V) *Plus difficile* - Points extrémaux d'une partie convexe, cas général

A) Une partie convexe est une intersection de demi-espaces fermés

Voir (X PSI 2022), questions 5 à 7

B) Démonstration du cas général

Voir (X PSI 2022), questions 10 et 13 à 15