X-ENS MP 2024 : épreuve A

Première partie

1. (a) $-M_0$ est symétrique réelle et par théorème spectral $\boxed{-M_0 \text{ est diagonalisable}}$.
$-I_n - M_0$ est de rang 1 et son noyau est de dimension $n-1$ (théorème du rang). En notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, les $e_1 - e_i$ pour $i \in [\![2, n]\!]$ sont $n-1$ vecteurs de ce noyau et en forment une base.
$e_1 + \cdots + e_n$ est propre pour $-M_0$ associé à $-(n-1)$.
On en déduit (par dimension et puisque les sous-espaces propres sont supplémentaires) que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(-M_0) = \{1, -(n-1)\}}$$

$$\boxed{E_1(-M_0) = \mathrm{Vect}((e_1 - e_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}),\ E_{-(n-1)}(-M_0) = \mathrm{Vect}(e_1 + \cdots + e_n)}$$

(b) On en déduit que $\chi_{-M_0}(x) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$. Cette quantité est aussi égale à $\det(M_x)$ et on a donc

$$(x-1)^{n-1}(x+n-1) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) M_x[1, s(1)] \dots M_x[n, s(n)]$$

Comme $M_x[i,j]$ vaut 1 si $i \neq j$ et x si $i = j$, le produit ci-dessus vaut $x^{\nu(s)}$ et

$$\boxed{(x-1)^{n-1}(x+n-1) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) x^{\nu(s)}}$$

2. En évaluant l'expression en $x = 1$, on obtient (puisque $n \geqslant 2$)

$$\boxed{\sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) = 0}$$

En dérivant l'expression et en évaluant en 1, on a de même

$$\boxed{\sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s)\nu(s) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 3 \end{cases}}$$

De plus, en intégrant entre 0 et 1 :

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(s)}{1 + \nu(s)} = \int_0^1 (x-1)^{n-1}(x+n-1)\, dx$$

Le calcul d'intégrale est élémentaire (par exemple par intégration par parties) et donne

$$\boxed{\sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(s)}{1 + \nu(s)} = \frac{(-1)^{n+1} n}{n+1}}$$

3. Dans la première égalité ci-dessus, on découpe la somme en deux morceaux selon la parité de la permutation s et il vient alors

$$\boxed{\mathrm{Card}\,\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \mathrm{Card}\,\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}}$$

Comme on est en situation d'équiprobabilité, on peut dénombrer. L'égalité précédente montre que les probabilités d'avoir une permutation paire ou impaire sont égales. Comme la somme des deux vaut 1,

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir une permutation paire (ou impaire) vaut } 1/2}$$

4. Une permutation est un dérangement quand elle n'a aucun point fixe : $\boxed{s \in \mathfrak{D}_n \iff \nu(s) = 0}$. On en déduit que la somme des $\varepsilon(s)$ pour $s \in \mathfrak{D}_n$ est égale au coefficient constant de $x \mapsto \det(M_x)$ c'est à dire $(-1)^{n-1}(n-1)$. En découpant cette somme selon la parité de la permutation, on a donc

$$\boxed{\operatorname{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \operatorname{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1}(n-1)}$$

5. (a) Les deux familles proposées sont libres car échelonnées en degré. Elles sont composées de $m+1$ éléments de $\mathbb{R}_m[X]$ qui est de dimension $m+1$ et donc

$$\boxed{\text{les familles } (1, X, \dots, X^m) \text{ et } (1, (X-1), \dots, (X-1)^m) \text{ sont des bases de } \mathbb{R}_m[X]}$$

(b) Par formule de Taylor pour les polynômes,

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X],\ P = \sum_{k=0}^{m} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

On utilise ceci avec $P = X^j$ et $a = 1$. Comme $(X^j)^{(k)}$ vaut 0 si $k > j$ et $\frac{j!}{(j-k)!}X^{j-k}$ sinon, on a donc

$$X^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}(X-1)^k$$

En numérotant lignes et colonnes de 0 à m, le coefficient (i,j) de la matrice de l'identité dans les bases spécifiées est le coefficient selon $(X-1)^j$ de X^i et vaut $\binom{j}{i}$.
Par ailleurs, avec cette même numérotation, $M[i,j] = \binom{i}{j}$ et donc

$$\boxed{\operatorname{Pass}(((X-1)^j)_{0 \leqslant j \leqslant m}, (X^j)_{0 \leqslant j \leqslant m}) = M^T}$$

(c) On a donc $\boxed{M \in GL_{n+1}(\mathbb{R})}$ et $(M^T)^{-1} = \operatorname{Pass}((X^j)_{0 \leqslant j \leqslant m}, ((X-1)^j)_{0 \leqslant j \leqslant m})$ et son coefficient (i,j) vaut (par formule du binôme) $(-1)^{j-i}\binom{j}{i}$. On en déduit que

$$\boxed{M^{-1} = \left((-1)^{i-j}\binom{i}{j}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant m}}$$

(d) Les relations $\forall k \leqslant m,\ u_k = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}v_\ell$ s'écrivent matriciellement $MV = U$ et donnent $V = M^{-1}U$. Il reste à traduire cette égalité matricielle pour conclure que

$$\boxed{\text{si} \quad \forall k \leqslant m, \quad u_k = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}v_\ell, \quad \text{alors} \quad \forall k \leqslant m, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}u_\ell}$$

6. On effectue une partition de $\mathfrak{S}_n$ selon l'ensemble des points fixes. Notons ainsi $F(E)$ les permutation $s \in \mathfrak{S}_n$ dont les points fixes sont exactement les éléments de E. On a

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{E \subset [\![1,n]\!]} F(E)$$

et la réunion est disjointe. E étant fixé, un élément $s \in F(E)$ est caractérisé par son action sur le complémentaire $\overline{E}$ et comme s envoie $\overline{E}$ sur lui même (par injectivité et cardinal), s est caractérisée par une permutation sans point fixe de $\overline{E}$. Le cardinal de $F(E)$ est donc égal à D_{n-k}

avec $k = |E|$ (en posant $D_0 = 1$). Comme il y a $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k et comme $\mathfrak{S}_n$ est de cardinal n, on conclut que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. On peut alors utiliser la question précédente (puisque cette égalité est vraie pour tout entier n) et obtenir

$$\boxed{D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

7. (a) Y_n est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Par équiprobabilité, on peut procéder par dénombrement. Notons

$$p_n = \mathrm{Card}\,\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} \quad \text{et} \quad q_n = \mathrm{Card}\,\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

en sorte que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{p_n}{D_n}$ et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{q_n}{D_n}$. On a alors $p_n + q_n = 1$ et avec Q4 $p_n - q_n = (-1)^{n-1}(n-1)$. On en déduit les valeurs de p_n et q_n et

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n} \text{ et } \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n}}$$

(b) D'après Q6, $\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e}$ et donc $D_n \sim \frac{n!}{e}$ et ainsi $\frac{n-1}{D_n} \to 0$ puis

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \{-1, 1\}, \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = \varepsilon) = \frac{1}{2}}$$

8. (a) Z_n prend des valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Toujours par équiprobabilité, on peut dénombrer. Le calcul du nombre de permutations ayant k points fixes a été fait en question 6 et vaut $\binom{n}{k} D_{n-k}$. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \ \mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!} = \frac{D_{n-k}}{k!(n-k)!}}$$

(b) k étant fixé, lorque $n \to +\infty$, $n - k \to +\infty$. Or, $\frac{D_p}{p!} \to \frac{1}{e}$ quand $p \to +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{e \times k!}}$$

(c) On pourrait utiliser la définition de l'espérance et calculer

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} k \mathbb{P}(Z_n = k)$$

en utilisant l'expression précédente et la formule de la question 6. Je propose une alternative et note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si $\sigma(i) = i$ et 0 sinon. On a alors $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$.
L'événement $(X_i = 1)$ contient $(n-1)!$ éléments et (équiprobabilité) $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{n}$.
Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 1}$$

On a donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 1}$$

On peut penser que le calcul évoqué plus haut donne une expression plus compliquée de l'espérance nécessitant des arguments pour le calcul de limite.

9. Dans le cas $n = 2$, on a deux permutations : l'identité qui est composée de deux cycles et la transposition $(1, 2)$ qui est un cycle. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n = 2, \text{ la quantité vaut } \tfrac{3}{2}}$$

Dans le cas $n = 3$, on a six permutations. L'identité se décompose en trois cycles. Les trois transpositions ont deux cycles. il y a enfin deux cycles de longueur 3. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n = 3, \text{ la quantité vaut } \tfrac{11}{6}}$$

Dans le cas $n = 4$, on a les cas suivants.

- Une unique permutation composée de 4 cycles qui est l'identité.
- Des permutations composées de 3 cycles : un de longueur 2 et deux de longueur 1. Ces permutations sont les transpositions et il y en a $\binom{4}{2} = 6$.
- Des permutations composées de 2 cycles : ou bien deux de longueur 2 ou bien un de longueur 3 et un de longueur 1. Une permutation du premier type est caractérisée par l'image de 1 et il y en a trois. Une du second est un cycle de longueur 3 et il y a en 4×2 (choix du point fixe et nombre de cycle de longueur 3 ayant un support donné).
- Les cycles de longueur 4 qui sont en nombre 6.

La somme des nombres de cycles vaut $4 + 18 + 22 + 6 = 50$ et

$$\boxed{\text{Pour } n = 3, \text{ la quantité vaut } \tfrac{25}{12}}$$

10. L'identité est la seule permutation composée de n cycles. Le nombre de cycles de longueur n (permutations composées d'un unique cycle) sont au nombre de $(n-1)!$ ($n-1$ choix pour l'image de 1 puis $n-2$ pour l'image de $s(1)$ etc.). Ainsi

$$\boxed{s(n, n) = 1 \text{ et } s(n, 1) = (n-1)!}$$

Les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\omega(\sigma) = k$ sont de deux types qui s'excluent.

- Si $\sigma(1) = 1$, on remarque que se donner une telle permutation revient simplement à se donner une permutation de $\{2, \ldots, n-1\}$ ayant $(k-1)$ cycles (puisque 1 est tout seul dans son cycle). Il y a donc $s(n-1, k-1)$ permutations qui relèvent de ce cas.
- Examinons maintenant le cas où $\sigma(1)$ est un entier $m > 1$ fixé. L'entier 1 apparait alors dans un cycle de σ qui est de longueur au moins 2 (puisqu'il contient au moins 1 et m) et on peut construire une permutation τ de $\{2, \ldots, n\}$ simplement en retirant 1 de ce cycle et en laissant les autres cycles inchangés. Par construction, τ a encore k cycles. Par ailleurs, on peut reconstruire σ à partir de τ et l'entier m comme suit : on regarde le cycle de τ qui contient m et, dans ce cycle, on insère l'entier 1 juste avant m. On déduit de cela qu'il y a $s(n-1, k)$ permutations à k cycles telles $\sigma(1)$ est égal à un entier $m > 1$ fixé.

On aboutit à

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n-1]\!],\ s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k)}$$

11. On a ainsi pour tout réel x et tout $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k &= s(n,1)x + \sum_{k=2}^{n-1}(s(n-1,k-1)+(n-1)s(n-1,k))x^k + s(n,n)x^n \\
&= (n-1)s(n-1,1)x \quad \text{car} \quad s(n,1)=(n-1)s(n-1,1) \\
&\quad +(n-1)\sum_{k=2}^{n-1} s(n-1,k)x^k \\
&\quad +\sum_{k=2}^{n-1} s(n-1,k-1)x^k \\
&\quad +s(n-1,n-1)x^n \quad \text{car} \quad s(n,n)=s(n-1,n-1) \\
&= (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^k + \sum_{k=2}^{n} s(n-1,k-1)x^k \\
&= (n-1+x)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^k
\end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k}$$

- C'est vrai si $n=1$ ($x=x$).
- Le calcul initial permet de déduire le résultat au rang n de celui au rang $n-1$.

12. On a $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{s(n,k)}{n!}$ (car situation d'équiprobabilité) et donc

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} ks(n,k)$$

En posant $Q = \prod_{i=0}^{n-1}(X+i)$, la somme ci-dessus vaut $Q'(1)$. Or,

$$\frac{Q'}{Q} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{X+i}$$

et donc

$$Q'(1) = Q(1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = n!\left(\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

On a ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}\left[X_n\right] \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)}$$

13. (a) Je garde la notation Q de la question précédente. On a cette fois

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = Q''(1)$$

Mais avec l'expression de Q'/Q, on a

$$\begin{aligned} Q'' &= Q' \times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{X+i} - Q \times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(X+i)^2} \\ &= Q \times \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{X+i} \right)^2 - Q \times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(X+i)^2} \end{aligned}$$

Comme $Q(1) = n!$, on en déduit que

$$\boxed{\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}}$$

(b) On écrit que $k^2 = k(k-1) + k$ pour voir apparaître $\mathbb{E}(X_n)$ et la quantité de Q13a et obtenir

$$\boxed{\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k^2 s(n,k) = \mathbb{E}\left[X_n\right] + \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \right)}$$

14. (a) Notons $S(n,k)$ l'ensemble des éléments $s \in \mathfrak{S}_n$ tels que $\omega(s) = k$. $\mathfrak{S}_n$ est la réunion disjointe des $S(n,k)$ et on a donc

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)^2 = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S(n,k)} \omega(\sigma)^2$$

Dans la somme intérieure, les termes valent k^2 et cette somme intérieure vaut $k^2 s(n,k)$. Avec la question précédente,

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)^2 = \mathbb{E}\left[X_n\right] + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

On sait que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right)^2 = \left(\ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 = \ln(n)^2 + 2\gamma \ln(n) + \gamma^2 + O\left(\frac{\ln(n)}{n} \right)$$

Par ailleurs $\sum(1/i^2)$ est convergente de somme $\pi^2/6$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

On a $\frac{1}{i^2} \sim \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$. Par sommation des relations de comparaison dans le cas convergent (termes positifs),

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sim \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \frac{1}{n+1} = O\left(\frac{\ln(n)}{n} \right)$$

On en conclut (avec Q12) que

$$\boxed{\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)^2 \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n)^2 + (2\gamma + 1)\ln(n) + c + O\left(\frac{\ln(n)}{n} \right) \text{ où } c = \gamma + \gamma^2 - \tfrac{\pi^2}{6}}$$

(b) On développe le carré dans la somme :

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2-2\frac{\ln(n)}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)+\ln(n)^2$$

Le premier terme du membre de droite est celui de Q14a. On regroupe les termes du second terme selon la valeur de $\omega(\sigma)$:

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}ks(n,k)=\mathbb{E}(X_n)=\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

On obtient ainsi une précision $O(\frac{\ln(n)}{n})$ et

$$\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$$

15. Posons $Y_n=(X_n-\ln(n))^2$. La question précédente montre que Y_n admet une espérance telle que

$$\mathbb{E}(Y_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$$

La suite de terme général $\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{\ln(n)}$ est convergente et donc bornée :

$$\exists C>0,\ \forall n\geqslant 2,\ \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{\ln(n)}\leqslant C$$

Soit $\varepsilon>0$. Par inégalité de Markov avec la variable positive Y_n,

$$\mathbb{P}(Y_n\geqslant(\varepsilon\ln(n))^2)\leqslant\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{\varepsilon^2\ln(n)^2}\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2\ln(n)}$$

Comme $(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n))\subset(Y_n\geqslant(\varepsilon\ln(n))^2)$, on conclut que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)\right)\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2\ln(n)}}$$

Deuxième partie

16. L'application A est une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$ (elle est constante sur chaque intervalle $[n,n+1[$ pour $n\geqslant 2$ où elle vaut $A(n)$ et sur $]-\infty,2[$ où elle est nulle). C'est en particulier une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour $n\geqslant 2$, la relation de Chasles donne

$$\int_2^n b'(t)A(t)\,dt=\sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1}b'(t)A(t)\,dt=\sum_{k=2}^{n-1}A(k)(b(k+1)-b(k))$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}a_kb(k) &= \sum_{k=2}^{n}(A(k)-A(k-1))b(k)\\ &= \sum_{k=2}^{n}A(k)b(k)-\sum_{k=1}^{n-1}A(k)b(k+1)\\ &= A(n)b(n)+\sum_{k=2}^{n-1}A(k)(b(k)-b(k+1))\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)\mathrm{d}t}$$

17. On choisit de noter

$$P_n = \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p$$

   (a) On a $P_1 = 1 \leqslant 4$, $P_2 = 2 \leqslant 4^2$ et $P_3 = 6 \leqslant 4^3$.

$$\boxed{\text{L'inégalité est vérifiée quand } n \in \{1,2,3\}}$$

   (b) Si n est pair, il n'est pas premier (puisque $\geqslant 3$) et $P_n = P_{n-1}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 3 \text{ est pair, } P_{n-1} \leqslant 4^{n-1} \implies P_n \leqslant 4^n}$$

   (c) On suppose $p \in [\![m+2, 2m+1]\!]$. Ainsi p divise $(2m+1)(2m)\dots(m+2) = m!\binom{2m+1}{m}$. Si on suppose de plus p premier, comme $p \geqslant m+1$, $p \wedge m! = 1$ (les facteurs premiers des entiers $\leqslant m$ sont $\leqslant m$ et différents de p). Par lemme de Gauss, on a donc p qui divise $\binom{2m+1}{m}$.
   Si deux nombres premiers distincts divisent un entier n, le produit de ces nombres premiers divise aussi n et donc

$$\boxed{\prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \text{ divise } \binom{2m+1}{m}}$$

   Par formule du binôme,

$$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k}$$

   Dans la somme, les termes d'indices m et $m+1$ sont égaux ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$) et la somme, composée de termes positifs, est plus grande que $2\binom{2m+1}{m}$. On a donc $\boxed{\binom{2m+1}{m} \leq 4^m}$.

   (d) On a donc

$$\prod_{\substack{m+1<p\leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^m$$

   Comme on suppose $P_{m+1} \leqslant 4^{m+1}$ (puique $m+1 \leqslant 2m$ car $n = 2m+1 \geqslant 3$) on a alors $P_n = P_{2m+1} \leqslant 4^{m+1}4^m = 4^{2m+1} = 4^n$.
   On a donc prouvé par récurrence que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^n}$$

18. Dans $[\![1,n]\!]$, il y a $E(n/p^k)$ multiples de p^k et $E(n/p^{k+1})$ multiples de p^{k+1}. Il y a donc $E(n/p^k) - E(n/p^{k+1})$ éléments de valuation p-adique valant k. Remarquons que ce nombre est nul pour k assez grand.
   Puisque ν_p vérifie $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$, on a

$$\nu_p(n!) = \sum_{a=1}^{n} \nu_p(a)$$

Dans cette somme, il y a $E(n/p^k) - E(n/p^{k+1})$ entiers a qui apportent une contribution égale à k. On a donc (la somme est en fait finie)

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(E(\frac{n}{p^k}) - E(\frac{n}{p^{k+1}})\right)$$

Comme $E(n/p^k)$ est nul pour k assez grand, on peut découper la somme et réindicer la seconde :

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} kE(\frac{n}{p^k}) - \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)E(\frac{n}{p^k})$$

les termes se simplifient et il reste

$$\boxed{\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)}$$

Tous les termes étant positifs, la somme est plus grande que le premier $E(n/p)$ lui même strictement plus grand que $\frac{n}{p} - 1$.
Comme $E(x) \leqslant x$ et comme $1/p^k$ est le terme général d'une série géométrique convergente,

$$\nu_p(n!) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{n}{p}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)$$

On a donc l'encadrement

$$\boxed{\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}}$$

19. (a) Comme $x \mapsto \ln(x)$ croît sur $[1, +\infty[$ et y est continue,

$$\forall k \geqslant 2,\ \int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(t)\ dt$$

On a ainsi

$$\forall n \geqslant 2,\ n\ln(n) - n + 1 = \int_1^n \ln(t)\ dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \ln(n) + \int_2^n \ln(t)\ dt \leqslant \ln(n) + n\ln(n) - n + 1$$

Majorant et minorant valent $n\ln(n) - n + O(\ln(n))$ au voisinage de $+\infty$. En ajoutant le terme $\ln(1) = 0$, on obtient donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + O(\ln(n))}$$

(b) Les facteurs premiers des entiers $\leqslant n$ étant $\leqslant n$, on a

$$\boxed{n! = \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}}$$

Le passage au logarithme donne

$$\ln(n!) = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \nu_p(n!) \ln(p)$$

Avec l'encadrement de la question 18, on en déduit que

$$-\ln\left(\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} p\right) = -\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \ln(p) < \ln(n!) - n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}$$

Avec la question 17, on peut majorer le produit et donc son logarithme ce qui donne une minoration en passant à l'opposé et

$$\boxed{n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - n\ln(4) < \ln(n!) \leqslant n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}}$$

(c) Par croissances comparées, $\frac{\ln(k)}{k(k-1)} = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$ est le terme général d'une série convergente et a fortiori

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} \text{ converge}}$$

(d) On en déduit a fortiori que le dernier terme du membre de droite en 19b est $O(n)$ (la somme est positive et majorée par la somme de la série de 19c) et on a

$$n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n!) + O(n)$$

19a donne $\ln(n!) = n\ln(n) + O(n)$ et on conclut que

$$\boxed{\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1)}$$

20. (a) On pose

$$a_k = \frac{\ln(k)}{k}\mathbf{1}_{\mathcal{P}}(k) \quad \text{et} \quad b : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$$

où $\mathbf{1}_{\mathcal{P}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres premiers. Comme b est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, +\infty[$, on peut utiliser la question 16 et en remarquant que $A(t) = R(t) + \ln(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{1}{p} &= \sum_{k=2}^{n} a_k b(k) \\
&= (R(n) + \ln(n))\frac{1}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{R(t) + \ln(t)}{t\ln(t)^2}\, dt \\
&= \frac{R(n)}{\ln(n)} + 1 + \int_2^n \frac{R(t)}{t\ln(t)^2}\, dt + \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)}
\end{aligned}$$

Comme $\ln_2$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ sur $[2, +\infty[$, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \ln_2(n) - \ln_2(2) + \frac{R(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\, \mathrm{d}t}$$

(b) $R+\ln$ est constante par morceaux et R est donc continue par morceaux. Le seul problème d'intégrabilité pour $t\mapsto \dfrac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ est au voisinage de $+\infty$.
Si $t\in[n,n+1[$, on a

$$R(t)=\left(\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}}\frac{\ln(p)}{p}-\ln(n)\right)+(\ln(n)-\ln(t))$$

Le premier terme du membre de droite est borné avec 19d. Le second est compris entre $-\ln(1+\frac{1}{n})$ et 0 et est aussi borné.
R est donc bornée sur $[2,+\infty[$ et $\dfrac{R(t)}{t(\ln(t))^2}=O(\frac{1}{t(\ln(t))^2})$ est une fonction intégrable ($t\mapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est positive et se primitive en $t\mapsto -\frac{1}{\ln(t)}$ qui admet une limite finie en l'infini).

$$\boxed{t\mapsto \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\text{ est intégrable sur } [2,+\infty[}$$

(c) R étant bornée, on a $\frac{R(n)}{\ln(n)}=O(\frac{1}{\ln(n)})$. De plus $\dfrac{R(t)}{t(\ln(t))^2}=O(\dfrac{1}{t(\ln(t))^2})$ et par théorème d'intégration des relations de comparaison (fonction positive intégrable) on a

$$\int_n^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t=O\left(\int_n^{+\infty}\frac{1}{t(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t\right)=O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

On a donc

$$\boxed{\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}\underset{n\to+\infty}{=}\ln_2(n)+c_1+O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\text{ avec } c_1=1-\ln_2(2)+\int_2^{\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}}$$

21. (a) L'entier n est multiple de q s'il s'écrit $n=kq$ et dans $[1,x]$, il y a $E(\frac{x}{q})$ tels multiples. On en déduit que

$$\boxed{\left|\text{Card }\{n\in\mathbb{N}\cap[1,x]: n\equiv 0(\text{mod} q)\}-\frac{x}{q}\right|\leqslant 1}$$

(b) On a (les sommes étant finies, l'interversion ne pose pas de problème)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) &= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p\mid n\\ p \text{ premier}}}1\\ &= \frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}}\sum_{\substack{n=0[p]\\ n\leqslant x}}1\\ &= \frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}}E(\frac{x}{p})\end{aligned}$$

On en déduit que (avec $t-1\leqslant E(t)\leqslant t$)

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}-\frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}}1\leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}$$

$\frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}} 1 \in [0,1]$ est borné. De plus

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}} \frac{1}{p} = \sum_{\substack{p\leqslant E(x)\\ p\text{ premier}}} \frac{1}{p} = \ln_2(E(x)) + O(1)$$

Comme $\ln(x) - \ln_2(E(x))$ est borné (puisque $1 \leqslant \frac{x}{E(x)} \leqslant 2$), on peut en conclure que

$$\boxed{\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} \omega(n) \underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x) + O(1)}$$

22. (a) En développant le carré, on obtient trois termes.
   - Le premier est la somme de $\omega(n)^2$.
   - Le troisième vaut $E(x)\ln_2(x)^2$ et donc $x\ln_2(x)^2 + O(\ln_2(x)^2)$.
   - Le second vaut $-2\ln_2(x)$ fois la somme des $\omega(n)$ et donc $-2x\ln_2(x)^2 + O(x\ln_2(x))$ (avec 21b)

   La précision obtenue est $O(x\ln_2(x))$ et en divisant par x, on trouve

$$\boxed{\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2\right) - \ln_2(x)^2 + O\left(\ln_2(x)\right)}$$

   (b) On a cette fois

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 = \sum_{n\leqslant x}\ \sum_{\substack{p_1|n\\ p_1\text{ premier}}}\ \sum_{\substack{p_2|n\\ p_2\text{ premier}}} 1$$

   C'est donc le cardinal de l'ensemble des triplets (n, p_1, p_2) tels que $n \leqslant x$, $p_1|n$ et $p_2|n$. Ces conditions peuvent aussi s'écrire p_1, p_2 premiers et $\leqslant x$ et n multiple de p_1 et de p_2. On obtient ainsi

$$\boxed{\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 = \sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1\text{ premier}}}\ \sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2\text{ premier}}} \operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1 \mid n \text{ et } p_2 \mid n\}}$$

   (c) La somme proposée est le cardinal de l'ensemble des triplets (p_1, p_2, n) tels que p_1, p_2 sont des nombres premiers différents et $p_1p_2|n$ (ceci équivalent à $p_1|n$ et $p_2|n$ quand $p_1\wedge p_2 = 1$). C'est donc aussi

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2\text{ premiers}}} E\left(\frac{x}{p_1p_2}\right) = \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1,p_2\text{ premiers}}} E\left(\frac{x}{p_1p_2}\right) - \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p^2}\right)$$

   On a tout d'abord

$$0 \leq \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p^2}\right) \leq x\frac{\pi^2}{6} = O(x\ln_2(x))$$

   Pour estimer l'autre terme, on remarque que

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1,p_2\text{ premiers}}} \left(\frac{x}{p_1p_2} - 1\right) \leq \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1,p_2\text{ premiers}}} E\left(\frac{x}{p_1p_2}\right) \leq \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1,p_2\text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2}$$

Avec 20c,

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2} = x\left(\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}\right)^2 = x\ln_2(x)^2 + O(x\ln_2(x))$$

et ainsi

$$x\ln_2(x)^2 + O(x\ln_2(x)) - \alpha(x) \le \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} E\left(\frac{x}{p_1p_2}\right) \le x\ln_2(x)^2 + O(x\ln_2(x))$$

où $\alpha(x)$ est le nombre de couples (p_1,p_2) de nombres premiers tels que $p_1p_2 \le x$.
Pour conclure à l'égalité demandée, il nous suffit de montrer que $\alpha(x) = O(x\ln_2(x))$. Pour un p_1 fixé, il y a au plus $E(\frac{x}{p_1})$ valeurs de p_2 convenables. On a donc

$$0 \le \alpha(x) \le \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p}\right) \le x \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}$$

et la question 20c (ou ce qu'on a vu en 21b) donne en effet $\alpha(x) = O(x\ln_2(x))$.

$$\boxed{\left(\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1 \mid n \text{ et } p_2 \mid n\}\right) - x\ln_2(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x\ln_2(x)\right)}$$

(d) Avec 22b et 22c, on obtient que

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 &= x\ln_2(x)^2 + O(x\ln_2(x)) + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}} \operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p\mid n\}\\ &= x\ln_2(x)^2 + O(x\ln_2(x)) + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p \text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p}\right)\end{aligned}$$

On a vu en 21b que cette dernière somme vaut $x\ln_2(x) + O(x)$. On a ainsi

$$\frac{1}{x}\left(\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2\right) = \ln_2(x)^2 + O(\ln_2(x))$$

et avec 22a, on conclut que

$$\boxed{\frac{1}{x}\left(\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\ln_2(x)\right)}$$

23. L'ensemble $\mathscr{S}\cap[1,\sqrt{x}[$ est de cardinal $\le \sqrt{x}$ et ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\operatorname{Card}\{n<\sqrt{x} : n\in\mathscr{S}\} = 0$$

On s'intéresse désormais à l'ensemble

$$\mathscr{S}' = \mathscr{S}\cap[\sqrt{x},x]$$

On remarque que

$$\forall n \in \mathscr{S}', \ \frac{(\omega(n)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} \geq \sqrt{\ln_2(n)}, \ 0 \leq \ln_2(x)-\ln_2(n) \leq \ln(2), \ \ln_2(n) \geq \ln_2(\sqrt{x})$$

Dans un premier temps, on écrit que

$$\sum_{n\in\mathscr{S}'} \frac{(\omega(n)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} \geq \sum_{n\in\mathscr{S}'} \sqrt{\ln_2(n)} \geq \mathrm{Card}(\mathscr{S}')\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}$$

ou encore

$$\mathrm{Card}(\mathscr{S}') \leq \frac{1}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}} \sum_{n\in\mathscr{S}'} \frac{(\omega(n)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)}$$

On va désormais majorer ce terme. Comme $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, on a (pour $n \in \mathscr{S}'$)

$$(\omega(n)-\ln_2(n))^2 \leq 2(\omega(n)-\ln_2(x))^2 + 2(\ln_2(x)-\ln_2(n))^2 \leq 2(\omega(n)-\ln_2(x))^2 + 2\ln(2)^2$$

On divise par $\ln_2(n)$ et on somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathscr{S}'} \frac{(\omega(n)-\ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} &\leq 2\sum_{n\in\mathscr{S}'} \frac{(\omega(n)-\ln_2(x))^2}{\ln_2(n)} + 2\ln(2)^2 \sum_{n\in\mathscr{S}'} \frac{1}{\ln_2(n)} \\
&\leq \frac{2}{\ln_2(x)} \sum_{n\in\mathscr{S}} (\omega(n)-\ln_2(x))^2 + \frac{x\ln(2)^2}{\ln_2(\sqrt{x})} \\
&\leq \frac{2x}{\ln_2(x)} O(\ln_2(x)) + O(\frac{x}{\ln_2(\sqrt{x})}) \text{ avec 22(d)} \\
&= O(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Card}(\mathcal{S}') = O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right)$$

et ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{Card}\{n \leqslant x : n \in \mathscr{S}\} = 0}$$