Correction du DM5 - Théorème d'Ascoli

L. Tintinaglia

Partie I – Complétude de F

1. Soit $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Avec $\varepsilon = 1$ dans la définition, on dispose de N tel que pour tout $n, p \geqslant N$, $\|u_n - u_p\| \leqslant 1$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \overline{B}(u_N, 1)$. La suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est donc bornée, et les termes $(u_n)_{n<N}$ étant en nombre fini (donc aussi borné), en en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}}$.
2. Puisque F est de dimension finie, on peut appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass, nous assurant de l'$\boxed{\text{existence d'une valeur d'adhérence de } (u_n)}$.
3. Soit φ et ψ deux extractrices, et $\varepsilon > 0$. Soit N tel que, pour tout $n, p \geqslant N$, $\|u_n - u_p\| \leqslant \varepsilon$. En particulier, puisque φ et ψ sont des extractrices, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$ et $\psi(n) \geqslant n$, et donc, pour tout $n \geqslant N$, $\varphi(n) \geqslant N$ et $\psi(N) \geqslant N$. On en déduit que pour tout $n \geqslant N$,
$$\|u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)}\| \leqslant \varepsilon.$$
On en déduit bien que $\boxed{u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)} \longrightarrow 0}$.
4. On sait qu'il existe une valeur d'adhérence a, et donc une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow a$. Ainsi, d'après la question précédente, pour toute extractrice ψ, $u_{\psi(n)} \longrightarrow a$. C'est vrai en particulier pour $\psi = \mathrm{id}$, donc $\boxed{u_n \longrightarrow a}$.

Partie II – Théorème de Heine pour l'équicontinuité

5. On suppose que A n'est pas uniformément équicontinue. Ainsi,
$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists f \in A, \quad \exists (x, y) \in K^2, \quad \|y - x\|_E \leqslant \eta \text{ et } \|f(y) - f(x)\| > \varepsilon.$$
On fixe un tel ε, et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta_n = \frac{1}{2^n}$. La proposition ci-dessus nous affirme donc qu'on dispose de $\widetilde{f_n} \in A$ et de $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n}) \in K^2$ tels que
$$\boxed{\|\widetilde{y_n} - \widetilde{x_n}\| \leqslant \frac{1}{2^n}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\|\widetilde{f_n}(\widetilde{x_n}) - \widetilde{f_n}(\widetilde{y_n})\|_F > \varepsilon}.$$
6.
   - Comme K est compact, on peut extraire de $\widetilde{x_n}$ une suite $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\widetilde{x}_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergeant vers } x \in K}$.
   - On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\|\widetilde{y}_{\varphi(n)} - \widetilde{x}_{\varphi(n)}\| \leqslant \frac{1}{2^{\varphi(n)}} \longrightarrow 0,$$
   donc, en définissant $y_n = \widetilde{y}_{\varphi(n)}$, on a aussi, par théorème d'encadrement, $\boxed{y_n \longrightarrow x}$.
   - Par ailleurs, en définissant de même $f_n = \widetilde{f}_{\varphi(n)}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\|\widetilde{f}_{\varphi(n)}(\widetilde{x}_{\varphi(n)}) - \widetilde{f}_{\varphi(n)}(\widetilde{y}_{\varphi(n)})\|_F > \varepsilon,$$
   donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\|_F > \varepsilon.}$$
7. A étant équicontinue en x, on dispose de $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $y \in B(x, \eta) \cap K$,
$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors, par inégalité triangulaire, pour tout $(y, z) \in (B(x, \eta) \cap K)^2$,

$$\|f(y) - f(z)\| \leqslant \|f(y) - f(x)\| + \|f(x) - f(z)\| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow x$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in B(x, \eta) \cap K$ et $y_n \in B(x, \eta) \cap K$.
On en déduit donc que

$$\forall n \geqslant N, \quad \boxed{\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| \leqslant \varepsilon}.$$

Cela est une contradiction flagrante de la question précédente, donc notre hypothèses initiale de notre démonstration par l'absurde est fausse.
On en conclut finalement que $\boxed{A \text{ est uniformément équicontinue}}$.

Partie III – Précompacité et séparabilité

8. On raisonne par l'absurde en supposant que pour $\eta > 0$ donné, il n'existe pas une telle famille. On construit alors une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que pour tout $n \neq p$, $\|a_n - a_p\| \geqslant \eta$. On fait cette construction par récurrence.
   - On définit a_0 quelconque dans K. En effet, on peut le faire, car l'hypothèse de notre démonstration par l'absurde implique clairement que K n'est pas vide.
   - Supposons $(a_0, \dots, a_n)$ sont construits tels que pour tous p et q distincts dans $[\![0, n]\!]$, $\|a_p - a_q\| \geqslant \eta$. Puisque $\bigcup_{k=0}^{n} B(a_k, \eta)$ ne recouvre pas K, par hypothèse, il existe $a_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B(a_k, \eta)$. En particulier, n'étant dans aucune de ces boules, a_{n+1} vérifie :

     $$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \|a_{n+1} - a_k\| \geqslant \eta.$$

     Les autres inégalités sont déjà vérifiées par hypothèse de récurrence
   - Ainsi, on a bien construit, par principe de récurrence, une suite $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tous n et p distincts, $\|a_n - a_p\| \geqslant \eta$.

   En particulier, cette suite ne peut pas avoir de valeur d'adhérence, puisque si φ est une extractice, $\|a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}\| \geqslant eta$, donc $a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}$ ne tend pas vers 0.
   Cela contredit la compacité de K. On en déduit que $\boxed{K \text{ est précompact}}$.
9. - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un recouvrement fini de K par des boules $B(x_i, \frac{1}{2^n})$, $i \in I_n$. Quitte à enlever quelques unes de ces boules, on peut supposer que toutes les boules rencontrent K. On peut alors trouver un élément y_i dans chaque boule appartenant à K. On définit $D_n = \{y_i, \ \ i \in I_n\}$, puis $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
   - Les D_n sont finis, donc D est au plus dénombrable, comme union dénombrable d'ensembles finis.
   - Montrons que D est dense dans K. Soit $x \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x est dans l'une des boules $B(x_i, \frac{1}{2^n})$ du recouvrement ayant servi à définir D_n. On pose alors $a_n = y_i \in D_n$, l'élément de K de la même boule, sélectionné dans D_n. On a donc $a_n \in D$ et comme x et a_n sont dans une même boule de rayon $\frac{1}{2^n}$, $\|a_n - x\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
   - On en déduit que $a_n \longrightarrow x$. Comme (a_n) est une suite d'éléments de $D \subset K$, on en déduit, par caractérisation séquentielle, que $\boxed{D \text{ est dense dans } K}$.

Partie IV – Théorème d'Ascoli, sens direct

10. Puisque $\overline{A}$ est compact, il est borné. Or $A \subset \overline{A}$, donc $\boxed{A \text{ est aussi borné}}$.
11. On suppose par l'absurde que A n'est pas équicontinue.
    (a) Par hypothèse, il existe $x \in K$ tel que A ne soit pas équicontinue en x. Par négation de la propriété d'équicontinuité, on dispose donc de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $f \in A$ et $y \in K$ tel que

    $$\|y - x\| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad \|f(y) - f(x)\| > \varepsilon.$$

    Avec $\eta_n = \frac{1}{2^n}$, on peut donc poser $f_n \in A$ et $x_n \in K$ tel que

    $$\|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\|f_n(x_n) - f_n(x)\| > \varepsilon}.$$

    En particulier, la première majoration amène $\boxed{x_n \longrightarrow x}$.

(b) Puisque $\overline{A}$ est compact, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\overline{A}$, on peut en extraire une suite $f_{\varphi(n)}$ convergeant vers $f \in \overline{A}$ (au sens de $\|\cdot\|_\infty$). On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x)\| > \varepsilon,$$

et par convergence uniforme de $f_{\varphi(n)}$, on dispose de N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$. On en déduit que pour tout $n \geqslant N$, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\|f(x_{\varphi(n)}) - f(x)\| &\geqslant +\|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x)\| - \|f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})\| - \|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\| \\ &\geqslant \|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x)\| - 2\|f - f_{\varphi(n)}\|_\infty \\ &> \varepsilon - 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

On pose alors $y_n = x_{phi(n+N)}$. On a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{x\|f(y_n) - f(x)\| > \tfrac{\varepsilon}{2}},$$

et, (y_n) étant extraite de (x_n), $\boxed{y_n \longrightarrow x}$.

(c) Par définition de l'adhérence, il existe $g \in A$ tel que $\|g - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{8}$. On a alors, par inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|g(y_n) - g(x)\| &\geqslant \|f(y_n) - f(x)\| - \|g(y_n) - f(y_n)\| - \|g(x) - f(x)\| \\ &\geqslant \|f(y_n) - f(x)\| - 2\|g - f\|_\infty > \frac{\varepsilon}{2} - 2\cdot\frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

On a donc trouvé une fonction $g \in A$ (en particulier continue), et une suite y_n telle que $y_n \longrightarrow x$ et $g(y_n)$ ne tend pas vers $g(x)$. Cela contredit le critère séquentiel de la continuité de g en x.

Ainsi, on peut conclure que $\boxed{A \text{ est équicontinue}}$.

NB : On aurait pu se passer de la dernière question, la fonction f étant elle aussi continue (l'adhérence de A étant prise dans $\mathcal{C}^0(K,F)$).

Partie V – Théorème d'Ascoli, sens réciproque

13. • Supposons $\overline{A}$ compact. Alors toute suite (f_n) d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans $\overline{A}$, donc dans $\mathcal{C}^0(K,F)$.
    • Réciproquement, supposons que toute suite $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans $\mathcal{C}^0(K,F)$. Soit $(g_n) \in \overline{A}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc trouver $f_n \in A$ telle que $\|g_n - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$. On a donc $g_n - f_n \longrightarrow 0$. Par hypothèse, (f_n) admet une valeur d'adherence f. On dispose donc d'une extractrice telle que $f_{\varphi(n)} \longrightarrow f$. Mais alors, on a également $g_{\varphi(n)} \longrightarrow f$. Ainsi, (g_n) admet une valeur d'adhérence f, et puisque $\overline{A}$ est fermé, $f \in \overline{A}$.
    On en déduit que $\boxed{\overline{A} \text{ est compact}}$.
14. Puisque A est bornée, il existe M tel que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty \leqslant M$. Ainsi,

$$\forall f \in A,\quad \forall x \in K,\quad \|f(x)\| \leqslant \|f\|_\infty \leqslant M.$$

On en déduit que $\boxed{\{f(x) \quad f \in A\ x \in K\} \subset \overline{B}(0_F, M) \text{ et est donc borné}}$.
15. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K, telle que $D = \{x_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{K}$, ce qui existe d'après la partie III.
    • La suite $(f_n(x_0))$ est bornée, et F est de dimension finie. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc ex extraire une suite $(f_{\varphi_0(n)}(x_0))$ convergente.
    • De même, la suite $(f_{\varphi_0(n)}(x_1))$ est bornée dans F de dimension finie, donc on peut en extraire $f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}(x_2)$ convergente.
    • En continuant de la sorte, on peut construire une famille (φ_n) d'extractrices telles que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(f_{\varphi_0\circ dots\circ\varphi_p(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. On définit alors φ par

$$\forall p \in \mathbb{N},\quad \varphi(p) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(p).$$

Comme $\varphi_{p+1}(p+1) \geqslant p+1 > p$, on a alors

$$\varphi(p+1) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(\varphi_{p+1}(p+1)) > \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(p) = \varphi(p),$$

donc φ est strictement croissante. De plus, par construction,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \varphi([\![p,+\infty[\![) \subset \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p([\![p,+\infty[\![),$$

donc $(f_{phi(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite à partir du rang p de la suite $(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ phi_p(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ qui est convergente.

On en déduit que $\boxed{(f_{\varphi(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente, et ceci pour tout } p \in \mathbb{N}}$.

Ce procédé d'extraction diagonal peut ne pas être inutile à retenir, il permet d'améliorer le procédé d'extractions successives ayant permis de montrer qu'un produit cartésien de compacts est un compact. Ici, on a pu faire converger un nombre dénombrable de suites par une extractrice commune.

16. Soit φ telle que dans la question précédente. Pour tout $x \in D$, on note $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x)$. Cela définit donc une application $f : D \to F$, telle que $((f_{\varphi(n)})_{|D})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Soit $\varepsilon > 0$. La famille A étant équicontinue sur le compact K, elle est uniformément équicontinue (théorème de Heine, partie II). Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x,y) \in A^2 \quad \|x-y\| < \eta \implies \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $(x,y) \in D^2$ tels que $\|x-y\| < \eta$. Par convergence simple de $(f_{\varphi(n)})$ sur D, on dispose donc de N_1 et N_2 tels que pour tout $n \geqslant N_1$, et tout $n \geqslant N_2$,

$$\|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\|_F < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \|f_{\varphi(n)}(y) - f(y)\|_F < \frac{\varepsilon}{3}.$$

La propriété d'équicontinuité uniforme permet alors d'obtenir, pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$:

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant \|f(y) - f_{\varphi(n)}(y)\|_F + \|f_{\varphi(n)}(y) - f_{\varphi(n)}(x)\| + \|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\|_F < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } D}$.

17. Soit $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \longrightarrow x \in K$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue sur D, on dispose de $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in D^2$ tels que $\|x-y\| < \eta$, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Or, on dispose également d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|x_n - x\| < \frac{\eta}{2}$, et donc pour tout $n, p \geqslant N$,

$$\|x_n - x_p\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x - x_p\| < \eta, \qquad \text{puis:} \qquad \|f(x_n) - f(x_p)\| < \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $\boxed{(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy}}$.

D'après la partie I, on en déduit que $\boxed{(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

18.
- Si on dispose d'une deuxième suite $(y_n) \in D^n$ telle que $y_n \longrightarrow x$, alors $y_n - x_n \longrightarrow 0$, et par critère séquentiel de la continuité uniforme de f sur D, on en déduit que $f(y_n) - f(x_n) \longrightarrow 0$. Ainsi, $f(y_n)$ est également convergente, et de même limite que $f(x_n)$. Par critère séquentiel de la limite, on en déduit que f admet une limite lorsque $y \to x$, $y \in D$. On définit $f(x)$ comme étant égal à cette limite.
- Soit alors $\varepsilon > 0$, et $\eta > 0$ un module de continuité uniforme de f sur D associé à ε, donc tel que

$$\forall (x', y') \in D^2, \quad \|x' - y'\| < \eta \implies \|f(x') - f(y')\| < \varepsilon.$$

Soit $x \in K^2$. Pour tout $(x', x'') \in B(x, \frac{\eta}{2}) \cap D$,

$$\|x' - x''\| < \eta, \qquad \text{donc:} \qquad \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon.$$

Ainsi, soit $y \in B(x, \frac{\eta}{2}) \cap K$. En passant à la limite lorsque $x' \to x$, $x' \in D$ et $x'' \to y$, $x'' \in D$, on en déduit que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc bien montré que pour tout $(x,y) \in K^2$,

$$\|x - y\| < \frac{\eta}{2} \implies \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue, et même uniformément continue sur } K}$.

19. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque A est uniformément équicontinue, il existe η tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $y \in B(x, \eta) \cap K$,

$$\|f_{\varphi(n)}(y) - f_{\varphi(n)}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il existe aussi η' un modult de continuité uniforme associé à f pour l'erreur $\frac{\varepsilon}{3}$. Quitte à prendre le minimum des 2, on peut supposer que $\eta' = \eta$.

D'après la partie III, K est précompact. On peut donc le recouvrir par des boules de rayon $\frac{\eta}{2}$ en nombre fini, qu'on note $B(a_1, \frac{\eta}{2}), \dots, B(a_m, \frac{\eta}{2})$. On suppose, sans perte de généralité, que chacune de ces boules ouvertes rencontre K. Comme D est dense dans K, elles rencontrent aussi D. Soit donc, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $b_i \in B(a_i, \frac{\eta}{2})$. On dispose, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, de N_i tel que pour tout $n \geqslant N_i$,

$$\|f_{\varphi(n_i)}(b_i) - f(b_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On pose $N = \max(N_1, \dots, N_m)$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, et tout $i \in [\![1, m]\!]$,

$$\|f_{\varphi(n_i)}(b_i) - f(b_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit alors $x \in K$. On dispose d'un indice $i \in [\![1, m]\!]$ ‘ tel que $x \in B(a_i, \frac{\eta}{2})$. Comme cette boule contient aussi b_i, on a donc

$$\|x - b_i\| \leqslant \eta, \qquad \text{donc:} \qquad \|f(x) - f(b_i)\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(b_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, pour tout $n \in N$,

$$\begin{aligned} \|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\| &\leqslant \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(b_i)\| + \|f_{\varphi(n)}(b_i) - f(b_i)\| + \|f(b_i) - f(x)\| \\ &< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in K$, on a bien montré que pour tout $n \geqslant N$, $\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$, et donc que $\boxed{f_{\varphi(n)} \longrightarrow f \text{ dans } (\mathcal{C}^0(K, F), \| \cdot \|_\infty)}$.

On déduit alors de la question 13 que $\boxed{\overline{A} \text{ est compact}}$, ce qui est bien ce qu'il fallait démontrer pour achever la preuve du théorème d'Ascoli.