

Correction du DM3 - Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

L. TINTINAGLIA

ESIM 2002 - MP - Mathématiques 1

I) Une première application de la relation d'équivalence.

On suppose que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$ et $f \neq \text{id}_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.

1. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Si on avait $f(A) = 0$, alors $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(B) = f(BA^{-1}A) = f(BA^{-1})f(A) = 0$, ce qui contredit que $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$. Donc $f(A) \neq 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r < n$.

(a) Posons $A_{r+1} = D_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on choisit A_k diagonale avec r coefficients diagonaux égaux à 1 les $n - r$ autres étant égaux à 0 dont celui d'indice (k, k) .

Ainsi toutes les A_k pour $k \in \llbracket 1; r+1 \rrbracket$ sont équivalentes à A d'après **I.2**.

Leur produit B est une matrice diagonale :

. si $1 \leq k \leq r$, alors $B[k, k] = 0$ car $A_k[k, k] = 0$.

. si $r+1 \leq k \leq n$, alors $B[k, k] = 0$ car $A_{r+1}[k, k] = 0$.

Ainsi $B = A_1 A_2 \dots A_{r+1} = 0_n$ où 0_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (b) $f(0_n) = f(0_n \times 0_n) = f(0_n) \times f(0_n)$, donc $f(0_n) = 0$ ou 1.

Si on avait $f(0_n) = 1$, alors on aurait : $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $1 = f(0_n) = f(0_n \times B) = f(0_n)f(B) = f(B)$, ce qui contredit que $f \neq \text{id}_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.

$f(A_1)f(A_2)\dots f(A_{r+1}) = f(B) = 0$, donc un des réels $f(A_k)$ est nul.

Or A_k est équivalente à A , donc il existe deux matrices inversibles P_k et Q_k telles que $A_k = Q_k^{-1}AP_k$.

Donc $f(Q_k^{-1})f(A)f(P_k) = 0$. Mais $f(Q_k^{-1})$ et $f(P_k)$ sont non nuls d'après le **II.1**, donc $f(A) = 0$.

3. On peut dire que $f(A) \neq 0 \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

f induit un morphisme de groupe multiplicatif $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ vers le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$.
En particulier, $f(I) = 1$.

Un exemple de telle application est : $A \longmapsto \det(A)$.

II) Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si $I \in \mathcal{J}$, alors $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = AI \in \mathcal{J}$, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{J}$ et par suite $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $\mathcal{J}$ contient une matrice inversible A , alors $I = A^{-1}A \in \mathcal{J}$, donc $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. d'après le 1.
3. Soit A un élément de $\mathcal{J}$ de rang $r \neq 0$.
 - (a) On a vu au **I.2.c** que A est équivalente à D_r . Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que $D_r = Q^{-1}AP$.
 $\mathcal{J}$ étant idéal à droite, $AP \in \mathcal{J}$, puis étant idéal à gauche, $D_r = Q^{-1}(AP) \in \mathcal{J}$.
 - (b) Pour $k \in \llbracket 1; n-r+1 \rrbracket$, on pose $A_k = \text{Diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ où $A_k[i, i] = 1 \iff k \leq i \leq k+r-1$
 (ce qui est possible car $k+r-1 \leq (n-r+1) + r-1 = n$).
 Toutes les A_k sont équivalentes à A d'après le **I.2**, donc sont toutes dans $\mathcal{J}$ (cf. **3.a**).
 On constate que $C = A_1 + \dots + A_{n-r+1}$ est diagonale et que ses éléments diagonaux sont tous des entiers ≥ 1 .
 Donc C est inversible et $C \in \mathcal{J}$ car $\mathcal{J}$ est stable pour l'addition comme sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Puisque $C \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{J}$, alors $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le **III.2**. Ainsi $(\mathcal{J} \neq \{0_n\} \implies \mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
 Donc les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont $\{0_n\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III) Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. E désigne un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{J}_E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{Im}(A) \subset E\}$.
 . $\mathcal{J}_E$ est non vide car contient 0_n
 . si A et B sont deux éléments de $\mathcal{J}_E$, alors $A - B \in \mathcal{J}_E$ car $\text{Im}(A - B) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}(B) \subset E + E \subset E$.
 Ainsi $\mathcal{J}_E$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 D'autre part, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{J}_E$, alors $AM \in \mathcal{J}_E$ car $\text{Im}(AM) \subset \text{Im}(A) \subset E$.
 Donc $\mathcal{J}_E$ est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{(n,q)}(\mathbb{R})$ et $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A) \subset \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$. De plus $\mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R}) = S \oplus \text{Ker}(A)$.
 - (a) Il est clair que $\phi : X \mapsto AX$ est linéaire et à valeurs dans $\text{Im}(A)$.
 . ϕ est injective car si $X \in \text{Ker}(\phi)$, alors $X \in S$ et $AX = 0$, donc $X \in S \cap \text{Ker}(A) = \{0\}$.
 . ϕ est surjective : en effet, soit $Y \in \text{Im}(A)$. $\exists X \in \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R}) / Y = AX$. X se décompose sous la forme $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in S$ et $X_2 \in \text{Ker}(A)$. Alors $Y = AX_1 + AX_2 = AX_1 = \phi(X_1)$. Ainsi $\exists X_1 \in S / Y = \phi(X_1)$.

En résumé, $\phi : X \mapsto AX$ définit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(A)$.

- (b) $\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $Be_i \in \text{Im}(B) \subset \text{Im}(A)$. D'après le a), $\exists ! \varepsilon_i \in S / Be_i = \phi(\varepsilon_i)$, c'est à dire $A\varepsilon_i = Be_i$.
- (c) On a $C = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q]$, donc $AC = [A\varepsilon_1, \dots, A\varepsilon_q] = [Be_1, \dots, Be_q] = B$ puisque Be_j représente la j -ième colonne de $B \in \mathcal{M}_{(n,q)}(\mathbb{R})$.

3. A, B, C sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifient : $\text{Im}(C) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}(B)$.

- (a) $Y \in \text{Im}(D) \iff \exists X \in \mathcal{M}_{(2n,1)}(\mathbb{R}) / Y = DX$. Or X peut s'écrire $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec X_1 et X_2 dans $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

Ainsi $Y \in \text{Im}(D) \iff \exists (X_1, X_2) \in (\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}))^2 / Y = (A, B) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = AX_1 + BX_2 \iff Y \in \text{Im}(A) + \text{Im}(B)$.

- (b) $C \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R})$ et $\text{Im}(C) \subset \text{Im}(D)$.

D'après le 2.c (avec $A = D$, $B = C$, $p = 2n$, $q = n$), $\exists W \in \mathcal{M}_{(2n,n)}(\mathbb{R}) / C = DW$.

- (c) W peut s'écrire $W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ avec U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $C = (A, B) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = AU + BV$.

4. $\mathcal{J}$ désigne un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Notons $X = \{\text{rg}(M), M \in \mathcal{J}\}$: c'est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $\mathcal{J} \neq \emptyset$), majorée par n . Elle admet donc un plus grand élément noté r . Comme $r \in X$, alors $\exists M_0 \in \mathcal{J} / \text{rg}(M_0) = r$.

- (b) Soit $M \in \mathcal{J} / \text{Im}(M) \not\subset \text{Im}(M_0)$: alors $\exists Y \in \text{Im}(M) / Y \notin \text{Im}(M_0)$. Par suite $\text{Im}(M_0)$ est inclus strictement dans $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$.

On peut trouver une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Im}(P) = \text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$ (par exemple une matrice de projecteur sur $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$).

D'après le 3 (avec $C = P$, $A = M$, $B = M_0$), il existe deux matrices U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P = MU + M_0V$.

Comme $M \in \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}$ est un idéal à droite, $MU \in \mathcal{J}$. De même $M_0V \in \mathcal{J}$. Puisque $\mathcal{J}$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $P = MU + M_0V \in \mathcal{J}$. Or $\text{rg}(P) = \dim(\text{Im}(P)) > \dim(\text{Im}(M_0)) = r$, ce qui contredit la définition de r .

- (c) En résumé, $\forall M \in \mathcal{J}$, $\text{Im}(M) \subset \text{Im}(M_0)$, ce qui signifie que $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_{\text{Im}(M_0)}$.

5. Soit $M \in \mathcal{J}_{\text{Im}(M_0)}$. Ainsi $\text{Im}(M) \subset \text{Im}(M_0)$. D'après le IV.2 ($B = M$, $A = M_0$), $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M = M_0C$. Comme $M_0 \in \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}$ idéal à droite, alors $M \in \mathcal{J}$.

On a donc $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\text{Im}(M_0)}$.

Bilan : les idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les parties de la forme

$$\mathcal{J}_E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{Im}(A) \subset E\} \text{ où } E \text{ est un sous-espace vectoriel quelconque de } \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}).$$

Pour $E = \{0\}$, alors $\mathcal{J}_E = \{0_n\}$ et pour $E = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{J}_E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (seuls idéaux bilatères).

IV) Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Ici $\mathcal{J}_E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid E \subset \text{Ker}(M)\}$.

$\triangleleft \mathcal{J}_E$ est non vide car contient 0_n

$\triangleleft$ si A et B sont deux éléments de $\mathcal{J}_E$, alors $A - B \in \mathcal{J}_E$ car $E \subset \text{Ker}(A)$ et $E \subset \text{Ker}(B)$,

donc $E \subset \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B) \subset \text{Ker}(A - B)$ puisque $(AX = 0 \text{ et } BX = 0 \implies (A - B)X = 0)$.

Ainsi $\mathcal{J}_E$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'autre part, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{J}_E$, alors $MA \in \mathcal{J}_E$ car $E \subset \text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(MA)$.

Donc $\mathcal{J}_E$ est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. (a) Voir le cours d'algèbre linéaire (lemme de factorisation, I.C)

(b) Il suffit de considérer l'élément $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ((resp. $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$) associé canoniquement à $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ (resp. $B \in \mathcal{M}_{(q,n)}(\mathbb{R})$). Alors $\exists w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \mid v = w \circ u$.

En notant C la matrice de $\mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{R})$ représentant w relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$, on a : $\underline{B} = \underline{C}\underline{A}$.

3. A, B, C sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifient $\text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B) \subset \text{Ker}(C)$.

Considérons $D = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{(2n,n)}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(D) \iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} AX \\ BX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff AX = 0 \text{ et } BX = 0 \iff X \in \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B).$$

Ainsi $\text{Ker}(D) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B)$.

Puisque $\text{Ker}(D) \subset \text{Ker}(C)$, d'après le 2.b ($A = D, B = C, p = 2n, q = n$), on a : $\exists G \in \mathcal{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R}) \mid C = GD$.

En écrivant $G = (U, V)$ avec U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient : $C = (U, V) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = UA + VB$.

4. Soit $\mathcal{J}$ un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $X = \{ \dim(\text{Ker}(M)), M \in \mathcal{J} \}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ minorée par 0 : elle admet donc un plus petit élément noté s et $\exists M_0 \in \mathcal{J} \mid \dim(\text{Ker}(M_0)) = s$.

Soit $M \in \mathcal{J}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\text{Ker}(M_0)$ n'est pas inclus dans $\text{Ker}(M)$.

Alors $\exists X \in \text{Ker}(M_0) \mid X \notin \text{Ker}(M)$, donc $\text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M_0)$ est inclus strictement dans $\text{Ker}(M_0)$

(car $X \in \text{Ker}(M_0)$, mais $X \notin \text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M_0)$).

Considérons un élément $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le noyau est $\text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M_0)$ (par exemple une matrice de projecteur). Puisque $\text{Ker}(Q) = \text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M_0)$, d'après le 3, il existe U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $Q = UM + VM_0$.

Comme M et M_0 sont dans $\mathcal{J}$ et que $\mathcal{J}$ est un idéal à gauche, alors $Q \in \mathcal{J}$.

Or $\dim(\text{Ker}(Q)) < \dim(\text{Ker}(M_0)) = s$, ce qui contredit la définition de s .

En résumé, $\forall M \in \mathcal{J}$, $\text{Ker}(M_0) \subset \text{Ker}(M)$, donc $\mathcal{J} \subset \underline{\mathcal{J}_{\text{Ker}(M_0)}}$.

Réciproquement, si $M \in \underline{\mathcal{J}_{\text{Ker}(M_0)}}$, alors $\text{Ker}(M_0) \subset \text{Ker}(M)$, donc d'après le **2.b** ($A = M_0$, $M = B$, $p = n$, $q = n$),

$\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ / $M = CM_0$. Comme $M_0 \in \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}$ est un idéal à gauche, alors $M \in \mathcal{J}$.

Ainsi $\mathcal{J} = \underline{\mathcal{J}_{\text{Ker}(M_0)}}$.

Bilan : les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les parties de la forme

$$\mathcal{J}_E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid E \subset \text{Ker}(M)\} \quad \text{où } E \text{ est un sous-espace vectoriel quelconque de } \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}).$$

Pour $E = \{0\}$, alors $\mathcal{J}_E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $E = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{J}_E = \{0_n\}$ (seuls idéaux bilatères).