

Corrigé du DM 2.

MP^a INP-HB / L. TINTINAGLIA

I.1 (2)

On peut le faire "à la main" mais le plus pratique est d'utiliser le théorème de sommation des relations de comparaison.

Comme $u_n \rightarrow l \in \mathbb{C}$, $u_n - l = o_{n \rightarrow \infty}(1)$.

De plus, la série $\sum 1$ est divergente à termes positifs donc par le théorème, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n (u_k - l) = o_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n 1 \right)$$

Ainsi $\sum_{k=0}^n u_k - (n+1)l = o(n+1)$ d'où

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k - l = o(1) \quad \text{et} \quad \underline{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \rightarrow l}$$

I.2 (2,5)

« Limite : Avec la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \rightarrow 0$, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ainsi $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

« Équivalent : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^n} \leq \frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{t^n} dt = \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

De même $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^n} \geq \frac{\ln(n+1)}{n} = \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

$$= \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Ainsi on obtient $\left| v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \right|$

I.3 ②

On montre que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$. Comme $(u_n) \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$, on peut poser $v_n = \ln(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(l), \text{ si } \underline{l \neq 1}$$

Alors par Césaire, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_{k+1} - v_k \rightarrow \ln(l)$

C'est-à-dire $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(l)n$.

$$\ln\left(\frac{\sqrt[n]{u_n}}{l}\right) = \ln(l) \left(\frac{\ln(u_n)}{n \ln(l)} - 1 \right) \rightarrow 0$$

d'où $\left| \sqrt[n]{u_n} \rightarrow l \right|$.

Si $\underline{l=1}$, on obtient $v_n = o(n)$ et $\ln(\sqrt[n]{u_n}) = \frac{v_n}{n} \rightarrow 0$
d'où $\left| \sqrt[n]{u_n} \rightarrow 1 \right|$.

On obtient alors $\left| \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \right|$ par Stirling

I.4 ②

La suite (a_n) est convergente donc bornée. Soit M en majorant de $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{Avec, } \left| \sum_{k=1}^n a_k (b_{n-k} - b) \right| \leq M \sum_{k=1}^n |b_{n-k} - b|$$

or $(|b_n - b|)$ tend vers 0 donc par Césaire,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k (b_{n-k} - b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{or, } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k (b_{n-k} - b)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b}_{\rightarrow ab \text{ par Césaire}}$$

donc $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \rightarrow ab \right|$

I.5 ①

$(u_n) = (C-1)^n$ ne converge pas mais (σ_n) converge.

I.6 ②

On considère le cas où (u_n) est croissante

4 Si (u_n) converge vers l' par Césaire $l = l'$

4 Si $u_n \rightarrow +\infty$, par Césaire, $\sigma_n \rightarrow +\infty$ ce qui est absurde

Si $l = \pm\infty$, la même disjonction de cas permet de conclure

de cas décroissant se traite de même

I.7 ②

4 On démontre l'indication. Soit $n \geq 1$.

$$\sum_{k=0}^n k e_k = \sum_{k=0}^n k (u_{k+1} - u_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) u_k - \sum_{k=0}^n k u_k \\
&= n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n k e_k
\end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k}_{\sim \sigma_n \rightarrow l} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k e_k \rightarrow 0$ par Cesàro
 car $k e_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

Donc $u_n \rightarrow l$.

I.8a (15)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n) u_n &= \sum_{k=n+1}^m u_k - u_n \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{i=n}^{k-1} e_k \\
&= \sum_{j=n}^{m-1} (m-j) e_k
\end{aligned}$$

I.8b (3)

On a $\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n = \frac{1}{m-n} \left(\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n) u_n \right)$
 $= \frac{1}{m-n} \sum_{j=n}^{m-1} (m-j) e_j$ par la.

Mais $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc on dispose de $C \geq 0$, $|n e_n| \leq C$
 pour $n \in \mathbb{N}$. Ainsi.

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \underbrace{\left(\frac{m-j}{m-n} \right)}_{\leq 1} \frac{C}{j} \leq C \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j}$$

Par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j} \leq \int_{n-1}^{m-1} \frac{dt}{t} \leq \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$$

Ainsi on a, pour C indépendant de (m, n) :

$$\left| \left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - \ell \right| \right| \leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$$

En utilisant ce que l'on vient de démontrer,

$$\begin{aligned} |\ell_m - \ell| &\stackrel{IT}{\leq} \left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - \ell \right| + \left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - \ell \right| \\ &\stackrel{IT}{\leq} C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (n+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n} \\ &\leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n} (|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|) \end{aligned}$$

I.8c ④

On prend $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ comme suggéré, on choisira α plus tard

$$\alpha n - 1 \leq \lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n \text{ donc } \frac{m+1}{m-n} \leq \frac{\alpha n + 2}{(\alpha - 1)n} \leq 1 + \frac{2}{\alpha - 1}$$

$$\text{Or } \alpha > 1 \text{ donc } \frac{\alpha + 2}{\alpha(n-1)} \leq \frac{3\alpha}{\alpha(n-1)} \leq \frac{3}{n-1} \leq 3$$

$$\text{donc } \frac{m+1}{m-n} \leq 4$$

$$\alpha \frac{m-1}{n-1} \leq \frac{\alpha n}{\alpha(n-1)} \leq \alpha + \frac{\alpha}{\alpha(n-1)} \text{ donc}$$

$$\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) \leq \ln(\alpha) + \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \leq \ln \alpha + \frac{1}{n-1}$$

4 Soit $\varepsilon > 0$, $\forall \varepsilon \leq 1$. Comme $\sigma_n \rightarrow l$, on dispose de N_0 , tel que pour $n \geq N_0$, $|\sigma_n - l| \leq \varepsilon$.

Comme $m > n$, $|\sigma_m - l| + |\sigma_n - l| \leq 2\varepsilon$

De plus il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{C}{n+1} \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_1$.

Ainsi $C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) \leq C \ln(\alpha) + \varepsilon$ pour $n \geq N_1$.

Pour $n \geq \max(N_0, N_1) = N$,

$$|u_n - l| \leq 3\varepsilon + C \ln(\alpha) + 4\varepsilon \frac{1}{\alpha - 1}$$

On s'intéresse maintenant à α .

Si $\alpha = 1 + d$,

$$C \ln(1+d) + 4\varepsilon \frac{1}{d} \leq Cd + 4\varepsilon \frac{1}{d} \text{ avec un minimum}$$

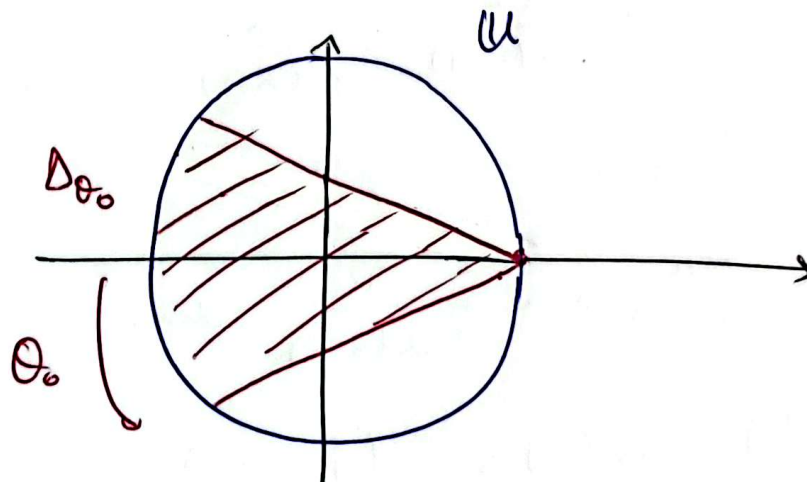
en $d = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{C}}$. Alors pour $\alpha = 1 + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{C}}$,

$$|u_n - l| \leq C \cdot 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{C}} + 4\varepsilon \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{C}}} = 3\varepsilon C + 4\sqrt{\varepsilon C}$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon} (3 + 4\sqrt{C})$$

Quitte à prendre $\frac{\varepsilon}{(3+4\sqrt{C})^2}$, $\underline{u_n \rightarrow l}$.

II.9a ①



II.9b (1)

Si $R > 1$, f converge sur le disque de rayon $\frac{R+1}{2} > 1$

Donc f converge en 1 et $\sum a_n$ converge

II.9c (2)

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N &= \sum_{n=0}^N a_n (z^n - 1) \\
 &= (z-1) \sum_{n=0}^N a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\
 &= (z-1) \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^{n-1} a_n z^p \\
 \text{sommes finies} \quad &\downarrow \\
 &= (z-1) \sum_{p=0}^{N-1} z^p (a_{p+1} + \dots + a_N) \\
 &= (z-1) \sum_{p=0}^{N-1} z^p (R_p - R_N) \\
 &= (z-1) \sum_{p=0}^{N-1} R_p z^p - R_N (z-1) \sum_{p=0}^{N-1} z^p \\
 &= \underline{(z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1).} \quad (C)
 \end{aligned}$$

II.9d (1.5)

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, $R_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. On a en passant à la limite dans (C) (les deux termes de gauche convergent donc $\sum R_n z^n$ converge):

$$\underline{f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.}$$

II.9e (13)

$R_n \rightarrow 0$ donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, |R_n| \leq \varepsilon.$$

Par iT,

$$\begin{aligned} |f(z) - S| &\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon |z-1| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |z|^n \\ &\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon |z-1| \frac{z^{N_0+1}}{1-|z|} \\ &\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \frac{\varepsilon |z-1|}{1-|z|} \quad \text{car } z \in \Delta_{\theta_0}. \end{aligned}$$

II.9f. (3)

$$\Delta \quad \frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)} \Leftrightarrow \frac{\rho \cos(\theta_0)}{2} \leq 1-|z|$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |z|^2 &= (1-\rho \cos \theta)^2 + \rho^2 \sin^2(\theta) \\ &\leq 1 - \rho \cos(\theta_0) + \rho^2 \frac{\cos^2(\theta_0)}{4} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2 \leq 1 - \rho \cos \theta_0 + \rho^2 \frac{\cos^2 \theta_0}{4}$$

$$\Leftrightarrow \rho \leq 4 \frac{2\cos \theta - \cos \theta_0}{4 - \cos^2 \theta_0}.$$

$$\text{Ainsi } \rho_0 = \frac{4\cos \theta_0}{4 - \cos^2 \theta_0}. \quad \text{Ainsi pour } |z-1| \leq \varepsilon,$$

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } |f(z) - S| &\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \frac{\varepsilon |z-1|}{1-|z|} \\ &\leq \varepsilon \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \frac{2}{\cos \theta_0}}_{\text{constante}} \right) \end{aligned}$$

On a donc démontré que $\left| f(z) \xrightarrow[\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}]{\quad} S \right.$

II.10 ①

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \quad \text{On a } f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} \text{ mais } \sum (-1)^n \text{ diverge}$$

II.11a ②

$$\begin{aligned} |S_n - f(z)| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k (1-z^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k \right| \\ &\stackrel{\text{IT}}{\leq} (1-|z|) \underbrace{\left| \sum_{k=0}^n a_k (1 + \dots + z^{k-1}) \right|}_{\leq \sum_{k=0}^n |a_k| k} + \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k \right| \quad \text{car } |z| < 1 \\ &\leq \sum_{k=0}^n |a_k| k \quad \text{car } |z| < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k |a_k|}{k} |z|^k \\ &\leq \frac{\sup_{k \geq n} (k |a_k|)}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |z|^k \\ &\leq \frac{\sup_{k \geq n} (k |a_k|)}{n(1-|z|)} \quad \frac{|z|^{n+1}}{1-|z|} \leq \frac{1}{1-|z|} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } |f(n) - S_n| \leq (1-\alpha) \sum_{k=0}^n \alpha_k |k| + \frac{\sup_{k \geq n} (k |\alpha_k|)}{n(1-\alpha)}$$

II.11b

(**)

Par Césaro, comme $k \alpha_k \rightarrow 0$,

$$(1-\alpha) \sum_{k=0}^n |\alpha_k| k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |\alpha_k| k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De plus $n(1-\alpha) = 1$ et $\sup_{k \geq n} (k |\alpha_k|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
car $k \alpha_k \rightarrow 0$.

Ainsi par (**), $|f(n) - S_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sum a_n$

converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

α α
α