Compléments classiques de mathématiques pour les concours des écoles d'ingénieurs

X, Mines, Centrale | Filières MP-MPI*

Luigi Tintinaglia

2024-2025

Table des matières

1 Suites et séries numériques **13**

I) Suites . . . 13

A) Suites sous-additives et lemme de Fekete . . . 13

B) Suites sous-géométriques et sur-géométriques . . . 16

II) Etude théorique de séries . . . 17

A) Séries "puissance-log" . . . 17

A.1 Rappel sur les séries de Riemann . . . 17

A.2 Séries de Bertrand . . . 17

B) Théorème de Césàro . . . 18

C) Règle de Raabe-Duhamel . . . 18

D) Etude de $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ . . . 19

E) Comparaison série-intégrale dans le cas où f' est intégrable . . . 20

III) Développements asymptotiques . . . 21

A) Séries de Riemann . . . 21

A.1 Cas $\alpha \neq 1$ . . . 21

A.2 Cas $\alpha = 1$, la série harmonique . . . 21

B) Méthode du α . . . 22

C) Une autre méthode pour trouver un équivalent d'une suite définie implicitement . . . 24

IV) Familles sommables . . . 25

A) Le théorème de Riemann . . . 25

V) Transformation d'Abel . . . 25

A) Cas d'application . . . 25

B) Exemples . . . 26

C) Transformation sur les restes . . . 27

2 Intégrales généralisées **29**

I) Quelques fondamentaux . . . 29

A) Définitions de l'intégrabilité . . . 29

A.1 Sur un segment (MPSI) . . . 29

A.2 Sur un intervalle quelconque (MP) . . . 31

A.3 Sommes de Riemann . . . 31

B) Convergence d'intégrales classiques . . . 33

C) Différence de logique essentielle avec les séries . . . 34

D) Fonctions non-intégrables dont l'intégrale converge . . . 35

E) Techniques essentielles et exemples clés . . . 36

E.1 Intégration par parties . . . 36

E.2 Changement de variables . . . 37

F) Application technique du théorème d'intégration des relations de comparaison . . . 38
F.1 Intégrabilité . . . 39
F.2 Equivalent . . . 40
II) Le lemme de RIEMANN-LEBESGUE . . . 41
A) Sur un segment . . . 41
A.1 Cas $\mathcal{C}^1$ . . . 41
A.2 Cas continu par morceaux . . . 41
B) Sur un intervalle quelconque . . . 43
III) Intégrales particulières . . . 44
A) Intégrales de WALLIS . . . 44
A.1 Définition, relation de récurrence et calcul . . . 44
A.2 Equivalent . . . 45
A.3 Applications importantes . . . 46
B) Intégrale de DIRICHLET . . . 46
C) Intégrales de FRULLANI . . . 47

3 Algèbre générale 49
I) Généralités sur les groupes . . . 49
A) Ordres d'un élement et théorème de LAGRANGE . . . 49
A.1 Définition et rappels . . . 49
A.2 Cardinal d'un sous-groupe, divisibilité . . . 49
B) Produit de groupes . . . 51
B.1 Produit direct . . . 51
B.2 Produit semi-direct interne . . . 52
B.3 Produit semi-direct externe . . . 53
C) Sous-groupes et générateurs d'un groupe cyclique . . . 54
D) Exposant d'un groupe abélien . . . 55
E) Groupes particuliers . . . 57
E.1 Groupe de cardinal premier . . . 57
E.2 Groupe dont tous les éléments sont d'ordre $\leqslant 2$ . . . 57
E.3 Groupe diédral . . . 58
F) Actions de groupe . . . 58
F.1 Définition . . . 58
F.2 Stabilisateur, orbite . . . 59
F.3 Centre . . . 60
G) Groupes quotient . . . 61
G.1 Définition, structure . . . 61
G.2 Passage d'un morphisme au quotient . . . 62
II) Groupe symétrique . . . 64
A) Décomposition cyclique d'une permutation . . . 64
B) Conjugaison . . . 64
C) Ordre d'une permutation . . . 65
C.1 Ordre d'un cycle . . . 65
C.2 Ordre d'une permutation . . . 65
D) Générateurs de $\mathfrak{S}_n$ . . . 66
E) Signature . . . 67
F) Sous-groupe alterné . . . 68
III) Anneaux et arithmétique . . . 69
A) Indicatrice d'EULER . . . 69

A.1 Définition et multiplicativité . . . 69
A.2 Valeurs particulières . . . 70
A.3 Egalité très classique $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ . . . 71
A.4 Nilpotence dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . 71
B) Inversion de Möbius . . . 72
B.1 Fonctions arithmétiques . . . 72
B.2 Fonction de Möbius . . . 73
B.3 Inversion de Möbius . . . 74
C) Anneaux $\mathbb{Z}[\alpha]$ . . . 75
C.1 Définition . . . 75
C.2 Conjugaison . . . 76
C.3 Norme et inversibilité . . . 77
D) Idéaux et anneaux principaux . . . 77
E) Anneaux euclidiens . . . 80
F) Idéaux maximaux . . . 81
G) Idéaux premiers . . . 81
IV) Corps . . . 82
A) Caractéristique d'un corps . . . 82
A.1 Définition . . . 82
A.2 Cardinal d'un corps fini . . . 83
A.3 Morphisme de Frobenius . . . 83
B) Carrés de $\mathbb{F}_p$ . . . 84
C) Tout sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ est cyclique . . . 85
D) Extension algébrique de corps . . . 85
D.1 Elément algébrique sur un corps . . . 86
D.2 Cas où l'algèbre est un surcorps de $\mathbb{K}$. . . . 87
D.3 Automorphismes du corps $\mathbb{Q}[\alpha]$ . . . 89
V) Polynômes . . . 90
A) Polynômes de Tcheybychev . . . 90
B) Irréductibilité, racines et surjectivité . . . 91
B.1 Racines et irréductibilité . . . 91
B.2 PGCD et corps . . . 92
B.3 Surjectivité d'un polynôme . . . 92
C) Irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$ . . . 93
C.1 Contenu . . . 93
C.2 Critère d'Eisenstein . . . 95
D) Polynômes cyclotomiques . . . 95
VI) Fractions rationnelles . . . 98
A) $\frac{P'}{P}$ . . . 98
A.1 Premiers rappels de convexité . . . 98
A.2 Théorème de localisation de Gauss-Lucas . . . 99
B) Pôle simple . . . 99

4 Algèbre linéaire **101**
I) Matrices et changement de base . . . 101
A) Matrice de passage . . . 101
B) Formule de changement de base et exemples essentiels . . . 101

C) Lemme de factorisation . . . 102
II) Rang d'une matrice . . . 104
A) Définition et calcul . . . 104
B) Matrices J_r . . . 104
C) Propriétés . . . 105
III) Pivot de Gauss . . . 106
A) Rappel de l'algorithme . . . 106
B) Opérations élémentaires . . . 107
B.1 Définition et propriétés . . . 107
B.2 Générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ . . . 108
IV) Formes linéaires, hyperplans, dualité . . . 109
A) En dimension quelconque . . . 109
B) CNS pour que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$ . . . 111
C) Autour des bases duales . . . 111
D) Dualité et dimensions . . . 113
E) Hyperplans de matrices . . . 115
V) Déterminant . . . 116
A) Formes n-linéaires antisymétriques, alternées . . . 116
B) CNS de liberté . . . 118
C) Déterminant d'un endomorphisme . . . 119
D) Déterminant d'une matrice, développement . . . 119
E) Déterminants classiques . . . 120
VI) Noyaux itérés et applications . . . 122
A) Monotonie de $\mathrm{Ker}(u^k)$ et $\mathrm{Im}(u^k)$ . . . 122
B) Particularités de la dimension finie . . . 123
C) $E = N \oplus I$ . . . 124
VII) Un lemme sur les unions de sous-espaces vectoriels . . . 124

5 Réduction **127**
I) Rappels de cours et premiers compléments . . . 127
A) Valeurs propres et vecteurs propres . . . 127
A.1 Cas d'un endomorphisme . . . 127
A.2 Cas d'une matrice . . . 128
B) Polynômes : possibilités et particularités . . . 130
B.1 Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal . . . 130
B.2 Irréductibilité du polynôme minimal (complément) . . . 131
B.3 Polynôme caractéristique . . . 131
B.4 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$? (complément) . . . 132
B.5 Théorème des noyaux . . . 133
C) Diagonalisation . . . 135
C.1 Généralités . . . 135
C.2 Commutant et bi-commutant (complément) . . . 136
D) Trigonalisation . . . 138
D.1 Généralités . . . 138
D.2 Décomposition en sous-espaces caractéristiques . . . 138
D.3 Décomposition de Dunford (complément) . . . 139
E) Exemples . . . 140
E.1 Diagonalisation et trigonalisation pratiques pour une matrice de taille 2 . . . 140

E.2 Diagonalisation et trigonalisation pratiques pour une matrice de taille 3 . . . 141
E.3 Projecteurs et symétries . . . 142
E.4 Endomorphismes nilpotents (complément) . . . 143
E.5 Inversibilité de $P(u)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$ (complément) . . . 144
II) Réduction simultanée . . . 145
A) Codiagonalisation . . . 145
B) Cotrigonalisation . . . 146
III) Réduction de matrices particulières . . . 148
A) Matrices de rang 1 . . . 148
B) Matrices circulantes . . . 149
C) Matrices compagnons . . . 150
IV) Endomorphismes cycliques . . . 152
A) Polynôme minimal ponctuel . . . 152
B) Définition des cycliques . . . 154
C) Polynôme minimal d'un cyclique, théorème de Cayley-Hamilton . . . 155
D) Endomorphismes cycliques particuliers . . . 156
D.1 Diagonalisables . . . 157
D.2 Nilpotents . . . 157
E) Induit d'un cyclique . . . 158
F) Commutant d'un cyclique . . . 158
G) Propriétés de $\Omega(E)$ . . . 159
V) Applications diverses . . . 160
A) Résolution d'équations matricielles . . . 160
B) Calculs de puissances . . . 162
B.1 Cas diagonalisable . . . 162
B.2 Avec un polynôme annulateur de petit degré . . . 162
B.3 Cas trigonalisable . . . 162
C) Remarques sur les sous-espaces stables . . . 163
C.1 Existence de droites ou plans stables dans $\mathbb{R}$ . . . 163
C.2 Hyperplans stables . . . 163
C.3 Sous-espaces stables des diagonalisables . . . 164
C.4 Sous-espaces stables des nilpotents . . . 164
C.5 Sous-espaces stables des cycliques . . . 165
D) Intersection de spectres . . . 166

6 Topologie **169**
I) Normes, convergence et distance . . . 169
A) Normes classiques . . . 169
A.1 Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. . . . 169
A.2 Inégalités de Hölder et Minkowski, norme $\|\cdot\|_p$ . . . 171
B) Compléments techniques sur l'adhérence et l'intérieur . . . 172
B.1 Union et intersection . . . 172
B.2 Empilements . . . 173
C) Densités . . . 173
D) Approximation d'un réel par des rationnels et constante de Liouville 175
D.1 Erreur en approchant un réel par un rationnel . . . 175
D.2 Théorème d'approximation diophantienne de Liouville . . . 175
D.3 Transcendance de la constante de Liouville . . . 176
E) Valeurs d'adhérence . . . 177

F) Distance à une partie . . . 178
F.1 Définition et propriétés . . . 178
F.2 Compact et distance . . . 178
F.3 Distance à un sous-espace vectoriel . . . 179
II) Compacité . . . 180
A) Théorème de Riesz . . . 180
B) Intersection décroissante de compacts . . . 181
C) Propriété de Borel-Lebesgue et outils . . . 181
C.1 Un segment de $\mathbb{R}$ est BL-compact . . . 181
C.2 BW $\Rightarrow$ BL . . . 182
C.3 BW $\Rightarrow$ BL . . . 184
D) Ensemble suite-limite . . . 185
III) Applications linéaires continues . . . 186
A) Caractérisations . . . 186
B) Comportement sur une boule . . . 187
C) Exemples et contre-exemples . . . 188
D) Un théorème de point fixe et de compacité . . . 188
E) Théorème de Hann-Banach . . . 189
IV) Connexité . . . 190
A) Connexité par arcs . . . 190
B) Connexité . . . 192
V) Hyperplans . . . 192
A) Adhérence d'un hyperplan . . . 192
B) Noyau d'une forme linéaire . . . 193
VI) Topologie de matrices . . . 194
A) Lemmes clés . . . 194
B) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . . . 195
C) Densité des diagonalisables, adhérence des trigonalisables . . . 195
D) Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . . . 197
E) Classes de similitude . . . 197
VII) Complétude . . . 198
A) Suites de Cauchy . . . 198
B) Espaces complets . . . 199
C) Théorème du point fixe de Picard . . . 200
D) Théorème de Baire . . . 201
VIII) Convexité . . . 202
A) Définitions et connexité par arcs . . . 202
B) Théorème de Gauss-Lucas . . . 202
C) Théorème de Carathéodory . . . 203
D) Compacité de l'enveloppe convexe d'un compact . . . 203

7 Suites et séries de fonctions **205**
I) Rappels de cours . . . 205
A) Modes de convergence . . . 205
A.1 Définitions . . . 205
A.2 Montrer la non-convergence uniforme . . . 206
B) Suites de fonctions . . . 206
B.1 Continuité . . . 206
B.2 Interversions . . . 207
B.3 $\mathcal{C}^k, k \geqslant 1$ . . . 208

C) Séries de fonctions . . . 209
C.1 Continuité . . . 209
C.2 Interversions . . . 210
C.3 $\mathcal{C}^k, k \geqslant 1$ . . . 210
II) Approximation uniforme et conséquences . . . 211
A) Fonctions en escalier . . . 211
B) Fonctions polynomiales . . . 211
III) Méthodes de développements asymptotiques . . . 213
A) $f_n(x) \underset{x\to a}{\sim} \alpha_n g(x)$ avec $\sum \alpha_n$ qui converge . . . 213
B) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = o_{x\to a}(f_0(x))$ . . . 214
C) Comparaison série-intégrale . . . 214
D) $\sum (-1)^n f_n(x)$ série alternée à x fixé . . . 215
IV) Convergence uniforme et equicontinuité . . . 216
A) Définition . . . 216
B) Préservation de la continuité à la limite pour une suite de fonctions équicontinues . . . 216
C) Equivalence entre la convergence uniforme et l'équicontinuité . . . 217
D) Théorème d'Ascoli . . . 218
V) Théorèmes de Dini . . . 221

8 Intégrales à paramètres **225**
I) Rappels des théorèmes essentiels . . . 225
A) Théorèmes d'interversion de Lebesgue . . . 225
B) Intégrales à paramètres . . . 226
II) Intégrales classiques . . . 228
A) Un calcul de l'intégrale de Dirichlet . . . 228
B) Etude de Γ . . . 230
C) Calcul de l'intégrale de Gauss . . . 231
III) Transformation de Fourier . . . 232

9 Séries entières **235**
I) Techniques de calcul de sommes . . . 235
A) Changement de variables . . . 235
B) Reconnaître la primitive ou la dérivée d'un DSE connu . . . 236
C) Décomposition en éléments simples . . . 236
D) Nombre de dérangements . . . 237
II) Rayon de convergence . . . 239
A) Subtilités de la règle de d'Alembert . . . 239
B) Théorème radial d'Abel et théorèmes taubériens . . . 240
C) Comportement au bord du disque ouvert de convergence . . . 242
III) Holomorphie . . . 244
A) Formule de Cauchy et applications . . . 245
B) Intégrale sur un cercle et applications . . . 247
IV) Compléments divers . . . 249
A) Caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ par majoration des dérivées . . . 249
B) Principe des zéros isolés . . . 250

10 Probabilités **253**
I) Lois usuelles . . . 254
II) Espérance . . . 255
A) Lemmes de Borel-Cantelli . . . 255
B) Majoration . . . 256
C) Séries de variables aléatoires . . . 256
III) Inégalités probabilistes . . . 257
A) Concentration . . . 257
B) Somme de variables aléatoires . . . 258
C) Théorème de Weierstrass . . . 260
D) Convergence presque-sûre et loi des grands nombres . . . 261
IV) Série génératrice de $S = \sum_{j=1}^{T} X_j$ . . . 263
V) Processus stochastiques et temps d'arrêt . . . 265
A) Le pile ou face . . . 265
A.1 Pile-pile ou face-face . . . 265
A.2 Pile-face ou face-pile . . . 267
B) Marches aléatoires en dimension 1 . . . 268
C) $\mathbb{E}(|S_n|)$ pour une marche aléatoire centrée . . . 271
D) Chaînes de Markov . . . 272
D.1 Matrices stochastiques . . . 272
D.2 Application probabiliste . . . 273

11 Espaces euclidiens **277**
I) Isométries et matrices orthogonales . . . 277
A) Théorème de Riesz . . . 277
B) Adjoint . . . 278
C) Caractérisation des projecteurs orthogonaux . . . 279
D) Rappel - Réduction des isométries . . . 279
E) Inégalité d'Hadamard . . . 280
F) Système de générateurs de $\mathcal{O}(E)$ . . . 281
II) Endomorphismes et matrices symétriques . . . 283
A) Factorisation et réduction simultanée . . . 283
B) Décomposition polaire . . . 284
C) Théorème de Courant-Fischer . . . 285
D) Encadrement du déterminant . . . 287
E) Norme d'algèbre triple . . . 287
III) Topologie sur un espace euclidien . . . 289
A) Structure de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . . . 289
B) Structure de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . . . 289
C) Projection sur un convexe fermé . . . 290
D) Connexités par arcs . . . 292
IV) Matrices de Gram-Schmidt . . . 293
A) Définition et premières propriétés . . . 293
B) $\mathrm{Gram}(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{Gram}(y_1, \ldots, y_k)$ . . . 294
C) Distance d'un point à un sous-espace vectoriel en base non-orthonormée . . . 295
V) Réduction des endomorphismes normaux . . . 296
A) $A^\top A$ et $AA^\top$ sont semblables . . . 297
B) Généralités sur les endomorphismes normaux . . . 297

C) Cas particulier des antisymétriques . . . 299
VI) Matrices de covariance . . . 300

12 Analyse différentielle **303**
I) Propriétés algébriques de l'exponentielle de matrices . . . 303
A) Convergences . . . 303
B) Algèbres de Lie . . . 306
C) Injectivité, surjectivité . . . 307
C.1 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . . . 307
C.2 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . . . 308
D) Application à un problème d'optimisation . . . 308
E) Morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ . . . 310
II) Équations différentielles . . . 311
A) Wronskien . . . 311
A.1 Wronskien de deux solutions (au programme) . . . 311
A.2 Méthode d'abaissement du degré . . . 312
A.3 Cas général . . . 312
B) Résolution de $y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)} = 0$ . . . 314
C) Étude des zéros d'une EDL d'ordre 2 . . . 315
C.1 Principe des zéros isolés . . . 315
C.2 Entrelacement de zéros . . . 316
C.3 $y'' + qy = 0$ avec $q \leqslant 0$ . . . 317
C.4 $y'' + qy = 0$ avec $q \geqslant \alpha > 0$, intervalle fini . . . 318
C.5 $y'' + qy = 0$ avec $q \geqslant \alpha > 0$, intervalle infini . . . 318
D) Lemme de Gronwall et applications . . . 319
E) Comportement en $+\infty$ des solutions de $X' = AX$ . . . 320
E.1 Cas A symétrique . . . 320
E.2 Cas A antisymétrique . . . 321
E.3 Cas A diagonalisable dans $\mathbb{C}$ . . . 321
F) Recherche de solutions périodiques . . . 322
III) Calcul différentiel et optimisation . . . 324
A) Différentiabilité . . . 324
A.1 Différentielles classiques . . . 324
A.2 Coordonnées polaires . . . 325
A.3 Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs . . . 326
A.4 Applications affines de jacobienne antisymétrique . . . 328
B) Espaces tangents . . . 329
B.1 Définition . . . 329
B.2 Exemples . . . 330
B.3 Lignes de niveau . . . 332
C) Équations aux dérivées partielles . . . 333
C.1 EDP classiques . . . 333
C.2 Calcul du laplacien en polaires . . . 334
C.3 Applications α-homogènes . . . 335
D) Optimisation . . . 336
D.1 Exemples très classiques . . . 336
D.2 Cas particulier où $\|f(x)\| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ . . . 337
E) Fonctions convexes . . . 339

E.1 Définition 339
E.2 Fonctions convexes différentiables 339
E.3 Fonctions convexes $\mathcal{C}^2$ 341
F) Extrémas et laplacien 342
F.1 Signe du laplacien en un extrémum local 342
F.2 Principe du maximum et fonctions harmoniques 342
F.3 Expression polaire pour une fonction harmonique $\mathbb{R}^2$ 343

Chapitre 1

Suites et séries numériques

I) Suites

A) Suites sous-additives et lemme de Fekete ⋆⋆⋆

Définition 1.1.1: Suite sous-additive

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle avec $u_0 = 0$. Alors on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *sous-additive* si :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$$

Lemme 1.1.2: Fekete

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sous-additive.

- ◅ Si $\left\{\frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$ est minoré, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{u_k}{k}$.
- ◅ Sinon, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = -\infty$.

Démonstration. ◅ Supposons dans un premier temps $\left\{\frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$ minoré. Considérons $\ell \in \mathbb{R}$ sa borne inférieure.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\ell \leqslant \frac{u_k}{k} \leqslant \ell + \varepsilon$.
Par récurrence immédiate sur la définition de la sous-additivité, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}^*$, $u_{pk+r} \leqslant pu_k + u_r$.
On prend $r \geqslant k$ et on effectue la division euclidienne (DE) de n par k :

$$u_n \leqslant \lfloor \frac{n}{k} \rfloor u_k + u_{n-k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$$

Ainsi :

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{\frac{n}{k}} \frac{u_k}{k} + \frac{u_{n-k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}}{n} \leqslant \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{\frac{n}{k}} \frac{u_k}{k} + \frac{\max\{|u_1|, ..., |u_{k+1}|\}}{n}$$

On en déduit qu'à k fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{\frac{n}{k}} \frac{u_k}{k} + \frac{u_{n-k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}}{n} = \frac{u_k}{k}$. Il existe donc $N \geqslant k$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{\frac{n}{k}} \frac{u_k}{k} + \frac{u_{n-k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}}{n} \leqslant \frac{u_k}{k} + \varepsilon \leqslant \ell + 2\varepsilon$$

Finalement :

$$\forall n \geqslant N, \ell \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$$

donc $\frac{u_n}{n} \to \ell$.

◅ Si $\ell = -\infty$, on procède de même, on fixe $k \geqslant 2$ et on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_k}{k} + \varepsilon$.

Exemple 1.1.3: Application probabiliste du lemme de Fekete

Soit x un nombre réel et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note Y_n la variable aléatoire réelle définie par

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. Montrer que si $\mathbb{P}(X_1 < x) = 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y_n < x) = 1$ et que si $\mathbb{P}(X_1 \geqslant x) > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y_n \geqslant x) > 0$.

◅ On suppose que $\mathbb{P}(X_1 < x) = 1$ et on pose $\Omega' = \bigcap_{i=1}^{n}(X_i < x)$.

Par indépendance, on a

$$\mathbb{P}(\Omega') = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i < x)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i < x)$$

Comme les X_i ont même loi alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathbb{P}(X_i < x) = \mathbb{P}(X_1 < x)$.
D'où $\mathbb{P}(\Omega') = (\mathbb{P}(X_1 < x))^n = 1$.
Si $\omega \in \Omega'$, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) < nx$ donc $Y_n(\omega) < x$. On a donc $\Omega' \subseteq (Y_n < x)$ d'où $\mathbb{P}(Y_n < x) = 1$.

◅ On suppose que $\mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \leqslant 0$. Pour $\omega \in \bigcap_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x)$, on a

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \geqslant x$$

D'où $\mathbb{P}(Y_n \geqslant x) \geqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \geqslant x) = (\mathbb{P}(X_1 \geqslant x))^n > 0$.

2. Soit m et n deux entiers naurels non nuls. Montrer l'inclusion d'évènements suivante :

$$\left(\{Y_m \geqslant x\} \wedge \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geqslant x\}$$

et en déduire l'inégalité

$$\mathbb{P}(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant \mathbb{P}(Y_m \geqslant x)\mathbb{P}(Y_n \geqslant x)$$

Soit $\omega \in (Y_m \geqslant x) \cap \left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right)$. On a : $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \geqslant x$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geqslant x$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \geqslant mx$ et $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geqslant nx$, d'où $Y_{m+n} \geqslant x$ et $\omega \in (Y_{n+m} \geqslant x)$.

On en déduit que $\mathbb{P}(Y_{n+m} \geqslant x) \geqslant \mathbb{P}\left((Y_m \geqslant x) \cap \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right)$. Les X_i sont indépendantes donc Y_m et $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ le sont aussi, puis

$$\mathbb{P}\left((Y_m \geqslant x) \cap \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right) = \mathbb{P}(Y_m \geqslant x)\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right)$$

Les (X_i) ont la même loi donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right) = \mathbb{P}(Y_n \geqslant x)$$

puis

$$\mathbb{P}(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant \mathbb{P}(Y_n \geqslant x)\mathbb{P}(Y_m \geqslant x)$$

3. Démontrer la convergence de la suite

$$\left((\mathbb{P}(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $\mathbb{P}(x_1 < x) = 1$: Dans ce cas, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{P}(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}} = (1 - \mathbb{P}(Y_n < x))^{\frac{1}{n}} = 0$.

D'où la convergence de la suite $\left((\mathbb{P}(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Si $0 \leqslant \mathbb{P}(X_1 < x) < 1$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \mathbb{P}(Y_n \geqslant x) \leqslant 1$.

On pose

$$u_n = -\ln(\mathbb{P}(Y_n \geqslant x)) \geqslant 0$$

Par le point (2), la suite (u_n) est **sous-additive**, donc $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **convergente d'après le lemme de Fekete**. L'image de cette suite par la fonction continue exp n'est que la suite $\left((\mathbb{P}(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'où sa convergence.

B) Suites sous-géométriques et sur-géométriques ⋆⋆

Définition 1.1.4: Suite sur-géométrique

Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *sur-géométrique* si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to +\infty$.

Proposition 1.1.5: Sommes partielles d'une suite sur-géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sur-géométrique. Alors en notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$S_n \sim u_n$$

Démonstration. D'après la règle de d'Alembert, comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to +\infty$, $\sum u_n$ diverge. De plus $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} \to 0$ donc $u_n = o(u_{n+1})$. $\sum u_{n+1}$ est une série divergente à termes positifs, donc d'après le théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}\right)$$

Ainsi $S_{n-1} = o(S_n)$. Or $u_n = S_n - S_{n-1} = S_n + o(S_n) \sim S_n$.

Définition 1.1.6: Suite sous-géométrique

Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *sous-géométrique* si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$.

Proposition 1.1.7: Restes d'une suite sous-géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sous-géométrique. Alors en notant $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$R_n \sim u_{n+1}$$

Démonstration. D'après la règle de d'Alembert, comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$, $\sum u_n$ converge. De plus $u_{n+1} = o(u_n)$. $\sum u_n$ est une série convergente à termes positifs, donc d'après le théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_{k+1} = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$$

Ainsi $R_n = o(R_{n-1})$. Or $u_n = R_{n-1} - R_n = R_{n-1} + o(R_{n-1}) \sim R_{n-1}$.

Exemple 1.1.8

On peut déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^2}$ par cette méthode.

Posons $u_n = e^{-n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On vérifie aisément que (u_n) est sous-géométrique.

Alors on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim u_{n+1}$. Ainsi :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^2} \sim e^{-(n+1)^2}$$

II) Etude théorique de séries

A) Séries "puissance-log"

A.1 Rappel sur les séries de Riemann

Rappel 1.2.1: Séries de Riemann

Soit α un réel. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 1$. Dans ce cas, elle converge absolument.

Démonstration. Par comparaison série-intégrale.

A.2 Séries de Bertrand ⋆⋆⋆⋆

Théorème 1.2.2: Séries de Bertrand

Soient α et β deux réels.

La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$:

- converge si $\alpha > 1$;
- converge si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$;
- diverge dans tous les autres cas.

Démonstration. Considérer tous les cas possibles.
Pour $\alpha = 1$, procéder par comparaison série-intégrale.
Pour $\alpha > 1$, prendre $\gamma > 1$ et étudier la croissance comparée.
Procéder de façon symétrique pour les autres cas.

Remarque 1.2.3

Ce principe de convergence se généralise pour les séries de la forme :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha_0}\ln(n)^{\alpha_1}\ln(\ln(n))^{\alpha_2}...\ln(...\ln(n))^{\alpha_k}}$$

pour k entier naturel, avec l'**ordre lexicographique**.

B) Théorème de Césàro ⋆⋆⋆⋆

Théorème 1.2.4: Césàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors, en notant $\forall n \geqslant 0, \sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, on a :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell\right)$$

Démonstration. **Méthode efficace à retenir.** On a $u_n - \ell = o(1)$. Ainsi comme $1 \geqslant 0$ et que la série $\sum 1$ diverge, on a par théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - (n+1)\ell = \sum_{k=0}^{n} u_k - \ell = o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = o(n+1)$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \ell + o(1)$$

On en conclut que

$$\sigma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Attention, la réciproque est fausse : on peut prendre pour cela $u_n = (-1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$. En effet dans ce cas (u_n) diverge mais

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k}_{\in\{0,1\}} \text{ donc } \sigma_n \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

C) Règle de Raabe-Duhamel ⋆⋆

Parfois, étudier les rapports entre les termes est intéressant. De même qu'étudier $u_{n+1} - u_n$ pour déterminer la monotonie d'une suite, étudier le rapport de termes consécutifs (dans le cas d'une suite **à termes strictement positifs**), peut fournir une idée qualitative de l'évolution de la suite à l'infini.
Ici, l'idée est que les termes se resserrent assez fort (cette "force" étant contrôlée par le paramètre α) pour que la suite converge.

Proposition 1.2.5

Soit $(u_n)_n \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$. Supposons qu'on dispose de $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right)$$

alors (u_n) converge *si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration. On montre en fait un résultat plus fort : $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$, avec $l > 0$.
On pose $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$, et on montre que (v_n) admet une limite.
On montre alors que $v_{n+1} - v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\min(2,1+h)}}\right)$ et donc que $\sum v_{n+1} - v_n$ converge, et par téléscopage, (v_n) converge.

D) Etude de $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ ⋆⋆

On considère dans cette partie $(u_n)_n \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$, telle que $\sum u_n$ diverge.
Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On cherche à étudier la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

Proposition 1.2.6

Si $\alpha > 1$, $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

Une seule idée à retenir : on procède par **comparaison série-intégrale**.

Démonstration. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $S_{n-1} \leqslant t \leqslant S_n$,

$$\frac{1}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{S_n^\alpha}$$

donc

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

En sommant on obtient tous calculs faits

$$\frac{S_0^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \geqslant \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha}$$

Les sommes partielles de la série **à termes positifs** étant majorées, la série converge.

Proposition 1.2.7

Si $\alpha = 1$, $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

Démonstration. On remarque que $\dfrac{u_n}{S_n} = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$. On peut supposer que $\dfrac{u_n}{S_n} \to 0$, le cas échéant la série diverge grossièrement.
On utilise le TCSTP (théorème de comparaison des séries à termes positifs), en ayant vu que :

$$\frac{u_n}{S_n} \sim -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = -\ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) \geqslant 0$$

Ainsi la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ et $\sum \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ ont la même nature. Comme $\ln(S_n) \to +\infty$, on conclut.

Proposition 1.2.8

Si $\alpha < 1$, $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

Démonstration. On compare avec le cas $\alpha = 1$.

E) Comparaison série-intégrale dans le cas où f' est intégrable ⋆

Proposition 1.2.9

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, R)$. On suppose f' intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Alors la série $\sum f(n)$ est de même nature que la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t\right)_n$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t - f(n)\right| &= \left|\int_n^{n+1} f(t) - f(n)\ \mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_n^{n+1}\int_n^t f'(u)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}t\right| \\ \left|\int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t - f(n)\right| &\overset{\text{IT}}{\leqslant} \int_n^{n+1}\int_n^{n+1} |f'(u)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}t = \int_n^{n+1} |f'(u)|\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

Mais f' est intégrable donc $\sum \displaystyle\int_n^{n+1} |f'(u)|\ \mathrm{d}u < +\infty$ et ainsi

$$\sum_n \left|\int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t - f(n)\right| < +\infty$$

Les séries $\sum_n f(n)$ et $\sum_n \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Par relation de Chasles, la série $\sum f(n)$ est de même nature que la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$.

III) Développements asymptotiques

A) Séries de Riemann ⋆⋆⋆⋆

A.1 Cas $\alpha \neq 1$

Théorème 1.3.1: Equivalents des restes des séries de Riemann convergentes

Soit $\alpha > 1$. Alors :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Théorème 1.3.2: Equivalents des sommes partielles des séries de Riemann divergentes

Soit $\alpha < 1$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Démonstration. Il s'agit, pour les deux théorèmes, de comparaisons série-intégrale.

A.2 Cas $\alpha = 1$, la série harmonique

On pose pour $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Lemme 1.3.3

Il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Démonstration. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

Or, $0 \leqslant \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Mais la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante minorée donc convergente. Par TCSTP, $\sum \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$ converge. Ainsi S_n converge, vers un réel $\gamma \geqslant 0$.

Or $S_n = H_n - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = H_n - \ln(n+1)$, donc $H_n - \ln(n) = S_n + \ln(\frac{n+1}{n}) \to \gamma$.
Il reste à montrer que $\gamma > 0$. Pour cela, on regarde le premier terme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1$$

on a donc nécessairement $\gamma \geqslant 1 > 0$.

Théorème 1.3.4

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Démonstration. On écrit, par téléscopage (**très classique**) :

$$H_n - \ln(n) - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} \delta_k$$

où

$$\delta_k = (H_k - \ln(k) - \gamma) - (H_{k+1} - \ln(k+1) - \gamma)$$

Par DL du ln, $\delta_k \sim \frac{1}{2k^2}$.
Ainsi par théorème de sommation des relations de comparaison,

$$H_n - \ln(n) - \gamma \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Onr d'après ce qui précède (Riemann $\alpha \neq 1$), $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$. Alors on a :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$$

Le terme suivant est laissé en exercice, il faut appliquer la même méthode.

B) Méthode du α ⋆⋆⋆⋆

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. (u_n) une suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ f \in \mathcal{C}^0(I, I) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On suppose $u_n \to 0$ et on cherche un équivalent de u_n.

Méthode 1.3.5: Obtenir un équivalent d'une suite définie implicitement par récurrence

On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non-nulle, par analyse-synthèse, en effectuant un développement limité qui dépend de f (voir exemple ci-après). En effet si on dispose de α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \to \beta \neq 0$, comme $\sum \beta$ diverge, par théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha \sim n\beta$$

et donc par téléscopage $u_n^\alpha \sim n\beta$. Finalement,

$$u_n \sim (n\beta)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Exemple 1.3.6: Premier exemple, sur un cas concret

Supposons $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $u_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$
L'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ est stable par sin puisque pour $n \in \mathbb{N}$, $\sin(u_n) \leqslant u_n$.
Par ailleurs, on connaît la limite de (u_n) : la suite est décroissante, minorée par 0 donc converge vers ℓ qui vérifie $\ell = \sin(\ell)$ et donc $\ell = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= \sin(u_n)^\alpha - u_n^\alpha \\
&= \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha \qquad \text{comme } u_n \to 0 \\
&= u_n^\alpha \left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha - 1\right) \\
&= u_n^\alpha \left(-\alpha \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) \\
&= \frac{-\alpha u_n^{\alpha+2}}{6}
\end{aligned}$$

On prend $\alpha = -2$, et $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \to \frac{1}{3}$.
Alors $u_n^{-2} \sim \frac{n}{3}$ et

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Exemple 1.3.7: Second exemple, sur un cas plus général

Supposons $f(x) = x - ax^{1+\delta} + o(x^{1+\delta})$, avec $(a, \delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
On cherche donc α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non-nulle, on effectue un DL :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= f(u_n)^\alpha - u_n^\alpha \\ &= u_n^\alpha \left(\left(1 - a u_n^\delta + o(u_n^\delta)\right)^\alpha - 1 \right) \\ &= u_n^\alpha \left(-\alpha a u_n^\delta + o(u_n^\delta) \right) \\ &\sim -\alpha a u_n^{\alpha+\delta} \end{aligned}$$

On prend donc $\alpha = -\delta$, de sorte à ce que $u_{n+1}^{-\delta} - u_n^{-\delta} \to a\delta$. Ainsi $u_n^{-\delta} \sim na\delta$ et donc

$$u_n \sim \left(\frac{1}{na\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

C) Une autre méthode pour trouver un équivalent d'une suite définie implicitement ⋆

Cette méthode dessert le même objectif que la méthode du α vue précédemment. Elle permet de faire apparaître le α directement.

Exemple 1.3.8: Seconde méthode : passage du discret au continu

Le développement limité du sinus amène, comme $u_n \to 0$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. Donc :

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3} \to \frac{1}{6}$$

Comme (u_n) converge, $u_n \sim u_{n+1}$, et

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^3} \to \frac{1}{6}$$

Or, par décroissance de (u_n) et croissante de $x \mapsto x^3$, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3} \leqslant \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dx}{x^3} \leqslant \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^3} \sim \frac{1}{6}$$

Alors par encadrement,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{6}$$

D'après le **théorème de Cesàro**,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_{k+1}}^{u_k} \frac{dx}{x^3} \to \frac{1}{6}$$

Par relation de Chasles, cela amène

$$\frac{1}{n} \int_{u_n}^{u_0} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2u_0^2} - \frac{1}{2u_n^2} \right) \to \frac{1}{6}$$

On retrouve finalement le résultat :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

IV) Familles sommables

Il est essentiel de bien connaître les théorèmes du cours à ce sujet : sommation par paquets, Fubini... Se référer au cours de MPSI à ce sujet.

A) Le théorème de Riemann ⋆⋆

Le théorème de Riemann illustre la nécessité du module dans la définition de famille sommable dans le cas non-positif (réel ou complexe).
Ce théorème dit que **l'ordre dans lequel on somme les termes d'une suite impacte la valeur de la somme, et peut même la rendre infinie**. Plus formellement :

Théorème 1.4.1

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\sum u_n$ converge mais $\sum |u_n|$ diverge (on parle de série semi-convergente).
Alors, pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on dispose de $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)} = \ell$

Démonstration. On traite seulement le cas $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, les autres se traitant de façon similaire.
On pose $\mathcal{I}_+ = \{n, u_n \geqslant 0\}$ et $\mathcal{I}_- = \{n, u_n < 0\}$, et on les ordonne : $\mathcal{I}_+ = \{i_k, k \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{I}_- = \{j_k, k \in \mathbb{N}\}$
On construit σ de la façon suivante :

- On pose $k_0 = \min\left\{n, \sum_{k=0}^{n} u_{i_k} > \ell\right\}$;
- Pour $k \leqslant k_0$, on pose $\sigma(k) = i_k$;
- Puis on prend $k_1 = \min\left\{n > k_0, \sum_{k=0}^{k_0} u_{i_k} + \sum_{k=k_0+1}^{n} u_{j_k} < \ell\right\}$;
- Pour $k_0 < k \leqslant k_1$, on pose $\sigma(k) = j_k$;
- Et ainsi de suite, on construit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ qui convient.

V) Transformation d'Abel

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

A) Cas d'application ⋆⋆⋆⋆

Théorème 1.5.1: Transformation d'Abel

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui a ses sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ bornées ; et (b_n) une suite réelle **positive** décroissante qui tend vers 0.
Alors, la série $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration. L'idée de la transformation est de réaliser une "intégration par parties" mais de façon discrète. On **primitive** a_n en S_n (car $a_n = S_n - S_{n-1}$) et on **dérive** b_n en $b_{n+1} - b_n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} b_k(S_k - S_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_k b_k - \sum_{k=0}^{n} S_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} b_k && (S_{-1} = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k b_{k+1} \\
\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= S_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k(b_{k+1} - b_k) && (\star)
\end{aligned}$$

Comme (S_n) est bornée et $b_n \to 0$, $S_n b_n \to 0$. On montre ensuite que $\sum S_k(b_{k+1} - b_k)$ converge absolument (attention, ce n'est pas une série à termes positifs, inutile de chercher à majorer les sommes partielles).
Soit M un majorant de (S_n). Alors pour $k \in \mathbb{N}$, $|S_k(b_{k+1} - b_k)| \leqslant M(b_{k+1} - b_k)$. Or $b_k \to 0$ donc $\sum b_{k+1} - b_k$ converge et par TCSTP, $\sum |S_k(b_{k+1} - b_k)|$ converge.
Vu $(\star)$, $\sum a_n b_n$ converge.

Remarque 1.5.2: Remarques sur l'utilisation de cette technique

- ◅ C'est hors programme, la démonstration est à refaire systématiquement.
- ◅ C'est inutile si la série est déjà absolument convergente.

B) Exemples ⋆⋆⋆

Exemple 1.5.3: Exemples très classiques

Les séries $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$, $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ sont convergentes.

En utilisant le théorème, il suffit de montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (laissé en exercice, un cas plus général est détaillé dans l'exemple suivant).

Exemple 1.5.4: Plus généralement...

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors pour tout $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $\sum a_n e^{in\theta}$ converge. En effet :

$$\begin{aligned}\forall N \in \mathbb{N}, \left|\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}\right| &= \left|\frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \\ &\leqslant \frac{1+\left|e^{i(N+1)\theta}\right|}{\left|1-e^{i\theta}\right|} \\ &\leqslant \frac{2}{\left|1-e^{i\theta}\right|}\end{aligned}$$

La suite des sommes partielles de $\sum e^{in\theta}$ est bornée : on retrouve bien les conditions d'application du théorème d'Abel. D'où la convergence de $\sum a_n e^{in\theta}$.

C) Transformation sur les restes ⋆⋆

Il se peut que la série $\sum a_n$ converge (on note S sa somme). Dans ce cas, il vaut mieux choisir une autre "primitive" de a_n avec les restes. Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} b_k(R_{k-1}-R_k) \\ &= R_{-1}b_0 + \sum_{k=1}^{n} R_{k-1}b_k - \sum_{k=0}^{n} R_k b_k \\ &= Sb_0 + \sum_{k=0}^{n-1} R_k b_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} R_k b_k - R_n b_n \\ &= Sb_0 - R_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} R_k(b_{k+1}-b_k)\end{aligned}$$

Or R_n converge (vers 0) donc $R_n b_n \to 0$ et de même que précédemment $\sum R_k(b_{k+1}-b_k)$ converge absolument.

Chapitre 2

Intégrales sur un intervalle quelconque

I) Quelques fondamentaux

On notera $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I, F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $F \subseteq \mathbb{R}$.

A) Définitions de l'intégrabilité ⋆⋆⋆⋆

Profitions de ce cours pour rappeler la définition de l'intégrale de Riemann, qui utilise les fonctions en escalier.

A.1 Sur un segment (MPSI)

Définition 2.1.1: Fonction en escalier

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est en escalier sur $[a\,,b]$ s'il existe une subdivision $(\sigma_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ de $[a\,,b]$ telle que

$$\forall 0 \leqslant i \leqslant n-1, \forall x \in \,]\sigma_i\,,\sigma_{i+1}[\,, f(x) = \alpha_i$$

On note $\text{Esc}\,([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Définition 2.1.2: Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f \in \text{Esc}\,([a\,,b]\,,\mathbb{R})$, $(\sigma_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ la subdivision associée et (α_i) les valeurs de f sur les intervalles $]\sigma_i\,,\sigma_{i+1}[$. On définit l'intégrale de f sur $[a\,,b]$ comme :

$$I_{[a\,,b]}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i)\alpha_i$$

Définition 2.1.3: Intégrabilité d'une fonction sur un segment

Une fonction f définie sur un segment $[a\,,b]$ est intégrable (au sens de RIEMANN) sur $[a\,,b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des applications $\varphi, \psi \in \text{Esc}\left([a\,,b]\,,\mathbb{R}\right)$ telles que :

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \text{ sur } [a\,,b] \text{ et } I_{[a\,,b]}(\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$$

Théorème 2.1.4: Intégrale d'une fonction sur un segment

Soit f une fonction intégrable sur $[a\,,b]$. Alors, f est bornée sur $[a\,,b]$ et

$$\sup\{I_{[a\,,b]}(\varphi), \varphi \in \text{Esc}\left([a\,,b]\,,\mathbb{R}\right), \varphi \leqslant f\} = \inf\{I_{[a\,,b]}(\psi), \psi \in \text{Esc}\left([a\,,b]\,,\mathbb{R}\right), f \leqslant \psi\}$$

Cette valeur commune est l'intégrale de f sur $[a\,,b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. Voir cours de première année.

Proposition 2.1.5: Densité des fonctions en escalier

$\text{Esc}\left([a\,,b]\,,\mathbb{R}\right)$ est dense dans $\mathcal{C}^0\left([a\,,b]\,,\mathbb{R}\right)$ pour la norme infinie $||.||_{\infty,[a\,,b]}$.

Ceci se réexprime ainsi.

Soit f une fonction continue de $[a\,,b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de φ, une fonction en escalier (qui appartient donc à $\text{Esc}\left([a\,,b]\,,\mathbb{R}\right)$), telle que :

$$\sup_{x \in [a\,,b]} |\varphi(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire que

$$\forall x \in [a\,,b]\,, |\varphi(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.
f est continue sur $[a\,,b]$ donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a\,,b]$.
On dispose donc de $\eta > 0$ tel que : $\forall (x,y) \in [a,b]^2\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Soit p un entier tel que $\dfrac{b-a}{p} < \eta$.
Fixons σ la subdivision $(\sigma_i)_{0 \leqslant i \leqslant p} = \left(a + i\dfrac{b-a}{p}\right)_{0 \leqslant i \leqslant p}$.
Définissons $\varphi \in \text{Esc}\left([a\,,b]\,,\mathbb{R}\right)$ ainsi :

- ◅ Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, la restriction de φ à $[\sigma_{i-1}\,,\sigma_i[$ est constante égale à $f(\sigma_i)$.
- ◅ La restriction de φ à $[\sigma_{p-1}\,,\sigma_p]$ est constante égale à $f(\sigma_p) = f(b)$

Montrons maintenant que $||f-\varphi||_{\infty,[a\,,b]} \leqslant \varepsilon$.
Soit $x \in [a\,,b]$. On dispose de $1 \leqslant i \leqslant p$ tel que $x \in [\sigma_{i-1}\,,\sigma_i]$

$$|f(x)-\varphi(x)| = |f(x)-f(\sigma_i)| \text{ par définition de } \varphi$$

Mais $|x-\sigma_i| < \eta$ donc $|f(x)-f(\sigma_i)| \leqslant \varepsilon$ et donc :

$$|f(x)-\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout x dans l'intervalle $[a\,,b]$, on passe à la borne supérieure et on obtient :

$$||f-\varphi||_{\infty,[a\,,b]} \leqslant \varepsilon$$

On retrouve ensuite tous les résultats classiques sur les fonctions intégrables : inégalité triangulaire, Chasles... Rappelons également que

Toute fonction monotone est intégrable sur un segment.
Toute fonction continue est intégrable sur un segment.

A.2 Sur un intervalle quelconque (MP)

Il s'agit du programme de deuxième année.

Nous ne rappellons pas ici les définitions, mais retenons qu'évaluer une intégrale impropre consiste à faire tendre une borne vers une limite finie ou infinie ; si tant est que cette limite existe. On parle le cas échéant d'intégrale convergente. Si l'intégrale de la valeur absolue (ou le module) de f converge, on dit que f est intégrable sur l'intervalle considéré.

A.3 Sommes de Riemann

Encore un rappel de première année, valable pour une intégrale d'une fonction continue sur un segment (en réalité ce théorème est vrai pour toute fonction intégrable).

Théorème 2.1.6: Sommes de Riemann "propres"

Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

Plus généralement, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^n = (\sigma_{n,k})_{k\in[\![0\,,l_n]\!]}$ une subdivision, et supposons que $p(\sigma^n) \to 0$ (le pas de la subdivision) et soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0\,,l_n-1]\!]$, $x_{n,k}$ un élément de $[\sigma_{n,k}\,,\sigma_{n,k+1}]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{l_n-1} (\sigma_{n,k+1}-\sigma_{n,k}) f(x_{n,k})$$

Mais qu'en est-il du cas **impropre** ? On peut toujours écrire, pour f intégrable sur $[0\,,+\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f = \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{kx}{n}\right)$$

Mais **attention, on ne peut pas toujours inverser les limites**. Il faut une convergence uniforme (ce sera vu lors des suites de fonctions). En attendant, il faut faire attention à ne pas transposer tous les théorèmes valables sur un segment dans le cas impropre.
Voici un exemple où le théorème de sommes de RIEMANN reste vrai.

Exemple 2.1.7: Un cas particulier des sommes de RIEMANN "impropres"

Soit $f :]0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue, **décroissante et positive**. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que f est intégrable sur $]0\,,1]$ *si et seulement si* la suite (S_n) est convergente et que si tel est le cas

$$\int_{]0\,,1]} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

◁ Supposons f intégrable sur $]0\,,1]$.
Par la décroissance de f, on remarque

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

En sommant, on obtient

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n - \frac{1}{n} f(1) \leqslant \int_{0}^{1-\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par théorème d'encadrement, on obtient : $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

◁ Réciproquement, supposons (S_n) convergente. La même démonstration dans l'autre sens suffit pour montrer que

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n - \frac{1}{n} f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lim_{n\to+\infty} S_n$$

La suite des intégrales précédente est majorée, et puisque f est positive, cela suffit pour conclure que l'intégrale de f converge.

On voit que les hypothèses supplémentaires de monotonie et de positivité sont essentielles pour la démonstration, ce n'est pas anodin, c'est un cas particulier d'un theorème de DINI (Théorèmes **7.5.1 et 7.5.2**)

B) Convergence d'intégrales classiques ⋆⋆⋆⋆

Théorème 2.1.8: Intégrales du type "Riemann"

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 1$
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha < 1$

Démonstration. On sait calculer ces intégrales.
$\underline{\alpha \neq 1}$: Soit $x > 1$.

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1 - x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow[x\to\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

$\underline{\alpha = 1}$: $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x) \to +\infty$.
On procède de même pour l'intégrale de 0 à 1.

Théorème 2.1.9: Exponentielles

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ converge *si et seulement si* $\alpha > 0$.

Démonstration. $\underline{\alpha \neq 0}$: Soit $x > 0$.

$$\int_0^x e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

$\underline{\alpha = 0}$: $\displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x \to +\infty$.

Théorème 2.1.10: Intégrales de Bertrand

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ converge *si et seulement si* $(\alpha > 1)$ **ou** $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ converge *si et seulement si* $(\alpha < 1)$ **ou** $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Attention, c'est bien $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$ dans les **deux cas**. Autre point litigieux : attention aux valeurs absolues autour du ln !

Démonstration. On applique la même méthode que pour les séries de Bertrand.

Proposition 2.1.11: ln

$t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0;1]$.

Démonstration. On connaît une primitive de $t \mapsto \ln(t)$.
De plus, sur cet intervalle, $|\ln(t)| = -\ln(t)$.

Proposition 2.1.12: L'intégrale de Gauss

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t < +\infty$$

Démonstration. Existence : $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue donc continue par morceaux ($\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$) sur $\mathbb{R}$.
Convergence sur $\mathbb{R}_+$: $e^{-t^2} = o(e^{-t})$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'où la convergence.
Sur $\mathbb{R}$: Par parité $\displaystyle\int_{-x}^{0} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. D'où la convergence sur $\mathbb{R}$.

On connaît par ailleurs la valeur de cette intégrale. Plusieurs démonstrations, notamment lors des Intégrales à paramètres, permettront de trouver cette valeur.

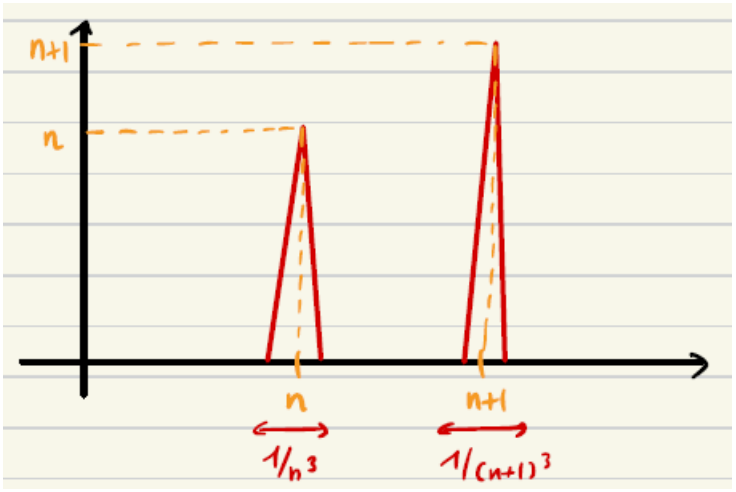
C) Différence de logique essentielle avec les séries ⋆⋆⋆

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Remarque 2.1.13: Le point clé

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, **cela n'implique pas nécessairement** $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$!
On peut même avoir f non-bornée.

Voici le contre-exemple : il faut prendre une fonction avec des pics.



Pour tout $x > 2$,

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2n^2} = 2\zeta(2) < +\infty$$

La réciproque est par ailleurs évidemment fausse (prendre $t \mapsto \dfrac{1}{t}$*).*

Remarque 2.1.14

Soit $b \in \mathbb{R}$. On peut avoir $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$ et $\displaystyle\int_{[a;b[} f$ qui converge.

Voici l'exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$.

En effet $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([0;1[)$, mais $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^\alpha$ qui admet une limite finie quand $\alpha \to 1$.

D) Fonctions non-intégrables dont l'intégrale converge ⋆⋆

Proposition 2.1.15

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$, mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration. Non-intégrabilité : On étudie $\displaystyle\int_\pi^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.

$$\int_\pi^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} I_k$$

On montre que $\sum I_k$ diverge.

$$I_k \geqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

d'où comme la série harmonique diverge, $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ce qui montre que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[\pi; +\infty[$ et à fortiori sur $[1; +\infty[$.
Convergence de l'intégrale : **On procède par IPP pour augmenter le degré en t au dénominateur** (très classique).

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, $\frac{\cos(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.
De plus $\frac{\cos(t)}{t^2} = \mathcal{O}_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1; +\infty[$. Donc par théorème de comparaison, $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.
Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}$ converge et donc $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

E) Techniques essentielles et exemples clés

E.1 Intégration par parties ⋆⋆⋆⋆

Remarque 2.1.16: Attention aux crochets

Lorsqu'on rédige une IPP, il faut toujours **vérifier la convergence du crochet avant d'écrire l'IPP**.

Introduisons pour les besoins de l'exemple qui va suivre la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

Montrons que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est $\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}(]0; +\infty[)$.
Sur $[1; +\infty[$,

$$e^{-t}t^{x-1} = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ par croissances comparées}$$

Par intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $[1; +\infty[$, par comparaison $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.
Sur $]0; 1]$, $e^{-t}t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ qui est intégrable sur $]0; 1]$ *si et seulement si* $1 - x < 1$, $x > 0$.
Finalement Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 2.1.17: Une relation sur Γ

Exprimons $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour $x > 0$.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x \,\mathrm{d}t \\ &\quad \text{on vérifie que } \left[-e^{-t}t^x\right]_0^A = -e^{-A}A^x \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 \text{ car } x>0 \\ &= \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}xt^{x-1}\,\mathrm{d}t \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

Question subsidiaire : Donner explicitement $\Gamma(n)$ pour n entier naturel.

E.2 Changement de variables ⋆⋆⋆⋆

Rappel 2.1.18: Théorème de changement de variables (CDV)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(]a;b[,\mathbb{K})$. Soit $\varphi :]\alpha;\beta[\mapsto]a;b[, \mathcal{C}^1$, **bijective et strictement monotone**. Alors,

$$\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \text{ ont même nature}$$

Si φ est strictement croissante, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

Si φ est strictement décroissante, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

Les hypothèses de régularité sont **indispensables** même sur un segment.

Remarque 2.1.19: Emploi des changements de variable

1. Calculer une intégrale (comme vu en première année) ;
2. Montrer que deux intégrales ont même nature (sans devoir passer par le calcul) ;
3. Utiliser des symétries pour faciliter le calcul.

Nous allons illustrer les points 2 et 3 dans l'exemple qui va suivre

Exemple 2.1.20

Montrons que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature, qu'elles convergent, et calculons leur valeur.

Même nature : Comme $t \mapsto \dfrac{\pi}{2} - t$ est une bijection strictement décroissante de

$\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur lui-même, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ converge *si et seulement si* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ converge et ont mêmes valeurs dans ce cas.

Convergence (intégrabilité) : $t \mapsto \ln t$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$. Il faut étudier la borne en 0^+.

$\sqrt{t}\ln(\sin t) = \sqrt{t}\ln(t+o(t)) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissance comparée donc

$$\ln(\sin t) = o_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

intégrable sur $]0;1]$ par RIEMANN.

Ainsi $t \mapsto \ln(\sin t)$ est intégrable.

Valeur : On pourrait faire le CDV $y = \sin t$, $t = \operatorname{Arcsin} y$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}}$, etc.

Mais on va utiliser le fait que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ et les propriétés du ln.

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) + \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(2t)\right)\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left(\sin(u)\right)\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln 2 && (u = 2t) \\
&= \frac{1}{2}I - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\left(\sin(u)\right)\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln 2 && (u = \pi - x) \\
&= \frac{1}{2}I + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(v)\right)\,\mathrm{d}v - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
2I &= I - \frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

D'où le résultat final $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

F) Application technique du théorème d'intégration des relations de comparaison ⋆⋆

Soit $f \in \mathcal{C}^1\left([a;+\infty[,\mathbb{R}_+^*\right)$, telle que :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{t} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$$

Pour quelles valeurs de λ f est-elle intégrable ? Donner un équivalent des intégrales partielles ou des restes selon les cas.

Au brouillon, on peut dire que $\ln f \sim \lambda \ln t$ *"donc"* $f \sim t^\lambda$ *qui est intégrable si et seulement si* $\lambda < -1$.
Cette idée va nous guider dans une démonstration rigoureuse.

F.1 Intégrabilité

Proposition 2.1.21: Cas $\lambda > -1$

Si $\lambda > -1$, f n'est pas intégrable.

Démonstration. Prenons $\gamma \in]-1, \lambda[$. On dispose d'un $A \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in [A, +\infty[$,

$$\frac{tf'(t)}{f(t)} \geqslant \gamma \text{ car } \lim_{t\to+\infty} \frac{tf'(t)}{f(t)} = \lambda > \gamma$$

Donc pour $x \geqslant A$,

$$\int_A^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_A^x \frac{\gamma}{t}\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\ln f(x) \geqslant \gamma \ln x + C$$

Par croissance de exp, $f(x) \geqslant e^C x^\gamma$, avec $\gamma > -1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\gamma\,\mathrm{d}x$ qui diverge.
Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Proposition 2.1.22: Cas $\lambda < -1$

Si $\lambda < -1$, f est intégrable.

Démonstration. C'est la même démonstration, avec les inégalités inversées.
Prenons $\gamma \in]\lambda, -1[$. On dispose d'un $A \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in [A, +\infty[$,

$$\frac{tf'(t)}{f(t)} \leqslant \gamma \text{ car } \lim_{t\to+\infty} \frac{tf'(t)}{f(t)} = \lambda < \gamma$$

Donc pour $x \geqslant A$,

$$\int_A^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_A^x \frac{\gamma}{t}\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\ln f(x) \leqslant \gamma \ln x + C$$

Par croissance de exp, $f(x) \leqslant e^C x^\gamma$, avec $\gamma < -1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\gamma\,\mathrm{d}x$ qui converge.
Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

F.2 Equivalent

L'idée est que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{tf'(t)}{\gamma}$. On procède ensuite par IPP puis par théorème d'intégration des relations de comparaison.

Proposition 2.1.23: Cas $-1 < \lambda < 0$

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+\lambda} x f(x)$$

Démonstration. Par IPP,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_a^x - \int_a^x tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, $-tf'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\lambda f(t) > 0$ et $\displaystyle\int_a^x -\lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Par théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$\int_a^x -tf'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} -\lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$(1+\lambda)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) + o_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Finalement $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+\lambda} x f(x)$.

Proposition 2.1.24: Cas $\lambda < -1$

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{1+\lambda} x f(x)$$

Démonstration. On procède de même par IPP (attention, ne pas l'écrire de suite, on n'a pas montré que tout était intégrable et que le crochet convergeait) On détermine donc un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf'(t)$:
D'une part, $0 < -\lambda f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -tf'(t)$ donc par comparaison, $t \mapsto tf'(t)$ est intégrable et par théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$-\lambda \int_x^{+\infty} f(t)dt \underset{t\to+\infty}{\sim} -\int_x^{+\infty} tf'(t)$$

Or $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) - af(a) - \int_a^x tf'(t)dt$. $xf(x)$ a une limite finie ℓ lorsque $x \to +\infty$ vu que f et $t \mapsto tf'(t)$ sont intégrables. Mais on ne peut avoir $\ell \neq 0$ car sinon on aurait

$f(x) \sim \dfrac{\ell}{x}$ qui est non-intégrable. Donc $\ell = 0$.
On peut donc réaliser l'IPP sur les restes :

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= [tf(t)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} tf'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -xf(x) - \lambda \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + o_{x\to\infty}\left(\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Finalement, $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{1+\lambda} xf(x)$.

II) Le lemme de Riemann-Lebesgue ⋆⋆⋆

A) Sur un segment

A.1 Cas $\mathcal{C}^1$

Lemme 2.2.1: Riemann-Lebesgue, segment

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a;b],\mathbb{K})$. Alors

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$$

Démonstration. On peut procéder par intégration par parties comme f est $\mathcal{C}^1$.

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{i}{\lambda} f(t)e^{i\lambda t}\right]_a^b + \frac{i}{\lambda}\int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

Donc pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(a)| + |f(b)|\right) + \frac{1}{|\lambda|}(b-a)||f||_{\infty,[a,b]} \\ &\xrightarrow[|\lambda|\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

En passant aux parties réelles et imaginaires, le résultat est aussi valable ainsi :

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$$

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$$

A.2 Cas continu par morceaux

Lemme 2.2.2: Riemann-Lebesgue, segment

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}([a;b],\mathbb{K})$. Alors

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$$

Démonstration. Impossible ici de procéder par intégration par parties. On fait la méthode classique lorsqu'il s'agit d'intégrales de fonctions continues sur un segment : **on utilise la densité des fonctions en escalier dans l'espace des fonctions $\mathcal{C}^0$ pour la norme infinie**.

◅ Pour $\varphi = \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}$ où $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$.

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_\alpha^\beta e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\frac{i}{\lambda}\left(e^{i\lambda\alpha}-e^{i\lambda\beta}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow[|\lambda|\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

◅ Pour $\varphi \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$. On a $\varphi = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \mathbb{1}_{[\alpha_j,\beta_j]}$ (somme de fonctions indicatrices).

$$\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{N}\gamma_j\int_a^b \mathbb{1}_{[\alpha_j,\beta_j]}e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$$

◅ Quitte à faire la même démonstration sur plusieurs intervalles sur lesquels $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ est continue, on suppose sans perte de généralité f continue sur $[a\,,b]$.
Soit maintenant $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\varphi \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$,

$$||f-\varphi||_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b \left(f(t)-\varphi(t)+\varphi(t)\right)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\overset{\text{IT}}{\leqslant} \int_a^b |f(t)-\varphi(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Mais par le point précédent $\left|\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[|\lambda|\to+\infty]{} 0$ donc on dispose de $A > 0$ tel que pour tout $|\lambda| \geqslant A$,

$$\left|\int_\alpha^\beta \varphi(t)e^{i\lambda t}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi pour $|\lambda| \geqslant A$,

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

B) Sur un intervalle quelconque

Lemme 2.2.3: Riemann-Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}(I, \mathbb{K})$, avec f intégrable sur I.
Alors

$$\int_I f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$$

Démonstration. Il faut tout d'abord justifier que $t \mapsto f(t)e^{i\lambda t}$ est aussi intégrable sur I (c'est évident, pourquoi ?).
On traite ici le cas $I =]a, b[$, les autres cas se traitant de même.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme

$$\int_\alpha^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[(\alpha,\beta)\to(a,b)]{} \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On dispose de $[\alpha, \beta] \subseteq I$ tel que $\displaystyle\int_a^\alpha |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_\beta^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (on peut rendre les restes d'une intégrale convergente aussi petits qu'on veut). *α et β sont bien indépendants de λ, l'inverse rendrait la démonstration fausse.*
Ainsi (par Chasles), $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| &\overset{\text{IT}}{\leqslant} \left|\int_a^\alpha f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_\alpha^\beta f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_\beta^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\overset{\text{IT}}{\leqslant} \int_a^\alpha |f(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_\alpha^\beta f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| + \int_\beta^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_\alpha^\beta f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Comme $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$, on dispose d'un $A > 0$ tel que pour tout $|\lambda| \geqslant A$,

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi pour tout $|\lambda| \geqslant A$,

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

III) Intégrales particulières

A) Intégrales de Wallis ⋆⋆⋆⋆

Cet exercice est un grand classique de MPSI, les démonstrations seront rapides. N'hésitez pas à le refaire en exercice !

A.1 Définition, relation de récurrence et calcul

Définition 2.3.1: Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Par changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, on peut aussi définir de façon équivalente

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Proposition 2.3.2: Relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Démonstration. On intègre par parties pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\sin^{n+1}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

d'où $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

Proposition 2.3.3: Calcul des intégrales

$$\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}\frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1} \ .$$

Démonstration. Démonstration par récurrence de la formule pour W_{2p} (démonstration similaire pour W_{2p+1}) :

◁ C'est vrai en $p = 0$

◁ Si c'est vrai jusqu'au rang p alors $W_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2} W_{2p} = \dfrac{(2p+1)(2p-1)\dots 1}{(2p+2)(2p)\dots 2}\dfrac{\pi}{2}$

A.2 Equivalent

Lemme 2.3.4

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1$$

Démonstration. On montre tout d'abord que $\forall p \in \mathbb{N}, W_{2p+1} \leqslant W_{2p} \leqslant W_{2p-1}$. Pour cela on remarque que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2], 0 \leqslant \sin^{2p+1}(x) \leqslant \sin^{2p}(x) \leqslant \sin^{2p-1}(x)$$

Donc par intégration

$$\forall p \in \mathbb{N}, W_{2p+1} \leqslant W_{2p} \leqslant W_{2p-1}$$

Donc $1 \leqslant \dfrac{W_{2p}}{W_{2p+1}} \leqslant \dfrac{W_{2p-1}}{W_{2p+1}} = \dfrac{2p+1}{2p}$

Et finalement

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1$$

Proposition 2.3.5: Formule de Wallis

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}\right]^2 = \pi \ .$$

Démonstration. On déduit de la question précédente :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{2}\left[\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}\right]^2 (2p+1) = 1$$

Proposition 2.3.6: Equivalent de W_n

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Démonstration. On fait la démonstration pour n impair . Soit $n = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)\dots 1} \\ &= \frac{\sqrt{p}}{2p+1}\sqrt{\frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p+2)\dots 2}{(2p-1)\dots 1}\right)^2} \\ &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(2p+1)}}\sqrt{\pi}\ . \end{aligned}$$

On conclut enfin comme $W_{2p} \sim W_{2p+1}$ d'après le Lemme 2.3.4

A.3 Applications importantes

Grâce aux intégrales de Wallis, on a trouvé une expression de π, comme produit infini. On peut aussi trouver la constante qui apparaît dans la formule de Stirling, ou calculer l'intégrale de Gauss.

B) Intégrale de Dirichlet ⋆⋆⋆

L'intégrale de Dirichlet est : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Il existe beaucoup de manières de calculer, notamment avec des Intégrales à paramètres.

Proposition 2.3.7

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$
$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Introduisons la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

Elle est bien définie car on peut prolonger $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$ en 0.
Calcul de I_n : (I_n) est constante. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2n+2)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{sin((2n+2)t)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $I_n = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Posons $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrons que $u_n - I_n \to 0$.

$$u_n - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t)\left(\frac{\sin t - t}{t\sin t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec f prolongeable par continuité en 0.
On peut donc utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue (**2.2.3**) et affirmer que $u_n - I_n \to 0$.
Calcul de I :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)u)}{u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{par CDV } u = \frac{t}{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Calcul de J :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\cos t \sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = I = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

C) Intégrales de Frullani ⋆⋆

Définition 2.3.8: Intégrales de Frullani

Les *intégrales de Cauchy-Frullani* sont des intégrales impropres de la forme

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

où $a, b > 0$ et f est une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3.9

Supposons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge. Alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

En réalité, ce résultat est vrai dans un cadre plus large.

Démonstration. Borne supérieure $+\infty$: L'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ existe pour $\varepsilon > 0$, il suffit de décomposer en deux intégrales :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^{1} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Le premier terme est une intégrale sur un segment, le deuxième existe par hypothèse.
Simplification par CDV :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u && \text{par CDV } u = ta \\
&= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u && \text{par Chasles}
\end{aligned}$$

Existence et calcul de $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$: Soit $g : t \mapsto f(t) - f(0)$.

Alors, $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{g(u)}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant ||g||_\infty \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Or, g est continue en 0 et $g(0) = 0$. Donc $||g||_\infty \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.
Ainsi,

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{g(u)}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

et donc

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Chapitre 3

Algèbre générale : groupes, anneaux, corps, polynômes

I) Généralités sur les groupes

A) Ordres d'un élement et théorème de Lagrange ⋆⋆⋆⋆

A.1 Définition et rappels

Définition 3.1.1

Un élement x de G est d'ordre fini s'il existe $k \geqslant 1$ tel que $x^k = 1_G$, et l'ordre de x est défini par :

$$\text{ord}(x) = \min\{k \geqslant 1, x^k = 1_G\}$$

Dans le cas contraire, x est dit d'ordre infini.

Remarque 3.1.2: Ordre d'un produit

Pour $a, b \in G$, $\text{ord}(ab) = \text{ord}(ba)$ mais ceci devient faux pour trois éléments ou plus.
Cela reste vrai pour une permutation circulaire.

A.2 Cardinal d'un sous-groupe, divisibilité

Théorème 3.1.3: Lagrange

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G (noté $H \leqslant G$). Alors

$$\text{Card}(H) \mid \text{Card}(G)$$

Démonstration. Soit $H \leqslant G$. On définit la relation suivante :

$$\forall a, b \in G, a \sim_H b \iff \exists h \in H, a = bh$$

◁ On vérifie que c'est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

◁ Par définition, pour $a \in G$, $\overline{a^H} = \{ah, h \in H\} = aH$.
Or $\varphi : \begin{cases} H & \longrightarrow & aH \\ h & \longmapsto & ah \end{cases}$ est une bijection. Donc $|\varphi(H)| = |H|$ et $|aH| = |H|$.

◁ Les classes de $\sim_H$ forment une partition de G. Si on note N le nombre de classes, $|G| = N|H|$.

Théorème 3.1.4: L'ordre divise le cardinal

Soit G un groupe fini. Pour tout $a \in G$, $a^{|G|} = 1_G$ donc

$$\text{ord}(a) \mid |G|$$

Démonstration. ◁ Cas G abélien (au programme) : On considère $x = \prod_{g \in G} g \in G$ bien défini car G est abélien.
$\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & ag \end{cases}$ est une bijection d'inverse $\varphi^{-1} : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & a^{-1}g \end{cases}$.
Donc $x = \prod_{g \in G} g = \prod_{g \in G} ag = a^{|G|} \prod_{g \in G} g = a^{|G|}x$ et ainsi $a^{|G|} = 1_G$.

◁ Cas général : On applique le théorème de Lagrange, alors $\text{ord}(a) = |\langle a \rangle| \mid |G|$.

Tout élement d'un groupe fini a un ordre fini, mais **la réciproque est fausse**.

Proposition 3.1.5: p-groupe quasi-cyclique de Prüfer

$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_{p^n}$ où $p \in \mathbb{P}$ fixé est un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini (et même plus, tout sous-groupe strict de G est cyclique !)

Démonstration. ◁ D'une part, G est un sous-groupe de $\mathbb{U}$. Clairement, $G \subseteq \mathbb{U}$ et $1_{\mathbb{U}} \in G$. Si $a, b \in G$, on dispose de $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $a \in \mathbb{U}_{p^m}$ et $b \in \mathbb{U}_{p^n}$. Si on suppose sans perte de généralité que $m \leqslant n$, $p^m \mid p^n$ donc $\mathbb{U}_{p^n} \subseteq \mathbb{U}_{p^m}$, ce qui montre que $a, b \in \mathbb{U}_{p^n}$ sous-groupe de $\mathbb{U}$, d'où l'on déduit que $ab^{-1} \in \mathbb{U}_{p^n}$ donc $ab^{-1} \in G$.

◁ Soit H un sous-groupe strict de G (noté $H < G$). Soit $y \in G \backslash H$ et soit $n = \min\{k, y \in \mathbb{U}_{p^k}\}$. Soit $x \in H$ et $q = \min\{k, x \in \mathbb{U}_{p^k}\}$.
Alors il existe un entier relatif k tel que $x = \exp\left(\frac{2ik\pi}{p^q}\right)$. Comme $x \notin \mathbb{U}_{p^{q-1}}$, les entiers k et p sont premiers entre eux, donc k et p^q aussi. Par suite x engendre le groupe $\mathbb{U}_{p^q}$, donc $\langle x \rangle = \mathbb{U}_{p^q} \subseteq H$. On en déduit que $H \subseteq \mathbb{U}_{p^{n-1}}$; en particulier H est fini. Nous notons m le plus petit entier tel que $H \subseteq \mathbb{U}_{p^m}$ et nous choisissons un élément z de H appartenant à $\mathbb{U}_{p^m} \backslash \mathbb{U}_{p^{m-1}}$. Par un raisonnement analogue au précédent, on prouve que $\langle z \rangle = \mathbb{U}_{p^m}$; il en résulte que $H \subseteq \mathbb{U}_{p^m} \subseteq H$. Finalement $H = \mathbb{U}_{p^m}$ et ce dernier est un groupe cyclique.

B) Produit de groupes

B.1 Produit direct ⋆⋆⋆

Définition 3.1.6: Groupe produit

Considérons $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes.
Posons $H = G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2), g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$. Alors la loi définie par

$$\forall (g_1, g_2), (g_3, g_4) \in H, (g_1, g_2) \star (g_3, g_4) = (g_1 \star_1 g_3, g_2 \star_2 g_4)$$

munit H d'une structure de groupe.

Démonstration. Ce sont des vérifications élémentaires laissées à la sagacité du lecteur.

Théorème 3.1.7: CNS pour qu'un produit direct soit cyclique

Considérons G_1 et G_2 deux groupes cycliques. Alors $G_1 \times G_2$ est cyclique si et seulement si $|G_1| \wedge |G_2| = 1$

Démonstration. Notons $\begin{cases} n = |G_1| \\ p = |G_2| \end{cases}$ Soit $m = n \vee p$.

◅ Si $n \wedge p \neq 1$: Alors $n \vee p < np$. Or pour tout $(x, y) \in G_1 \times G_2$,

$$(x, y)^m = (x^m, y^m) = (1_{G_1}, 1_{G_2}) \text{ car } \begin{cases} |G_1| \mid m \\ |G_2| \mid m \end{cases}$$

D'où l'ordre de (x, y) divise $m < np$. Donc $G_1 \times G_2$ n'a pas d'élément d'ordre np, il ne peut donc être cyclique.

◅ Si $n \wedge p = 1$: On note $\begin{cases} G_1 = \langle a \rangle \\ G_2 = \langle b \rangle \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \text{ord}(a) = n \\ \text{ord}(b) = p \end{cases}$.
Pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (a, b)^k = 1_G &\iff && (a^k, b^k) = (1_{G_1}, 1_{G_2}) \\ &\iff && \begin{cases} a^k = 1_{G_1} \\ b^k = 1_{G_2} \end{cases} \iff \begin{cases} n = \text{ord}(a) \mid k \\ p = \text{ord}(b) \mid k \end{cases} \\ &\underset{n \wedge p = 1}{\iff} && np \mid k \end{aligned}$$

B.2 Produit semi-direct interne ⋆⋆

Remarque 3.1.8: Cas général

Soient H et F deux sous-groupes de G.
$\langle H \cup F \rangle = \{h_1 f_1 \dots h_r f_r, r \geqslant 1, h_i \in H, f_i \in F\}$.
Notons HF le sous-ensemble de G formé des éléments qui peuvent s'écrire comme un produit hf avec $h \in H$ et $f \in F$. On a l'inclusion évidente :

$$HF \subseteq \langle H \cup F \rangle$$

Attention, cette inclusion n'est pas stricte en général, et HF n'a aucune raison d'être un sous-groupe de G, car il n'est *a priori* stable ni par l'inversion, ni par le produit.

Il manque une propriété à H pour qu'on ait $HF = \langle H \cup F \rangle$, c'est-à-dire

$$\{h_1 f_1 \dots h_r f_r, r \geqslant 1, h_i \in H, f_i \in F\} = \{hf, h \in H, f \in F\}$$

Introduisons une nouvelle notion :

Définition 3.1.9: Sous-groupe distingué

Soit $H \leqslant G$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$
2. $\forall g \in G, gH = Hg$

On dit dans ce cas que H est *distingué* dans G, et on note $H \lhd G$.

Démonstration. $\lhd$ $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: Soient $g \in G$ et $h \in H$.
$ghg^{-1} \in (gH)g^{-1} = (Hg)g^{-}1 = H(gg^{-1}) = H$.
$\lhd$ $\underline{(2) \Rightarrow (1)}$: Soit $g \in G$. On a $gHg^{-1} \subseteq H$.
De plus, $g^{-1}Hg \subseteq H$, en remplaçant g par g^{-1}. Donc $h \subseteq gHg^{-1}$.
D'où $h = gHg^{-1}$ et $Hg = gH$.

Lemme 3.1.10

Soient H et F deux sous-groupes de G, avec $H \lhd G$. Alors :

$$\langle H \cup F \rangle = HF$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\langle H \cup F \rangle \subseteq HF$. Soit r un entier non-nul et soient $h_1, \dots, h_r$ (resp. $f_1, \dots, f_r$) des éléments de H (resp. F). Par récurrence sur r, on montre que $h_1 f_1 \dots h_r f_r \in HF$, ce qui établira le lemme.

Pour $r = 1$ c'est évident. On suppose donc $r > 1$ et l'assertion établie pour $r - 1$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, $h_1 f_1 \dots h_{r-1} f_{r-1} \in HF$; il existe donc $h_0 \in H$ et

$f_0 \in F$ tels que $h_1 f_1 \dots h_{r-1} f_{r-1} = h_0 f_0$. Dès lors

$$h_1 f_1 \dots h_r f_r = h_0 f_0 h_r f_r = h_0 f_0 h_r f_0^{-1} f_0 f_r = hf$$

où l'on a posé $h = h_0 f_0 h_r f_0^{-1}$ et $f = f_0 f_r$. Comme H est distingué dans G, $f_0 h_r f_0^{-1} \in H$, d'où il découle que $h \in H$, et $f \in F$. Ainsi $h_1 f_1 \dots h_r f_r = hf$ appartient donc à HF.

Définition 3.1.11: Produit semi-direct interne

Un groupe G est *produit semi-direct interne* d'un sous-groupe distingué H et d'un sous-groupe K *si et seulement si*

- $G = HK = \langle H \cup K \rangle$, c'est-à-dire que tout élément g de G s'écrit $g = hk$ où $h \in H$ et $g \in G$.
- $H \cap K = \{1_G\}$, c'est-à-dire que l'écriture $g = hk$ est unique.

B.3 Produit semi-direct externe ⋆

Définition 3.1.12: Produit semi-direct externe

Soient N et H des groupes et soit $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. Notons $N \underset{\varphi}{\rtimes} H$ l'ensemble $N \times H$ muni de la loi de composition définie par

$$(n_1, h_1) \underset{\varphi}{\rtimes} (n_2, h_2) = (n_1 \varphi(h_1)(n_2), h_1 h_2)$$

Alors $N \underset{\varphi}{\rtimes} H$ est un groupe, appelé *produit semi-direct* de H par N relativement à φ.

Démonstration. Vérifications élémentaires mais techniques :

- Montrer que la loi $\underset{\varphi}{\rtimes}$ est associative ;
- Ensuite montrer que $(1_N, 1_H)$ est neutre pour la loi $\underset{\varphi}{\rtimes}$;
- Finalement, on montre que tout élément admet un inverse.

Exemple 3.1.13: Produit direct ou semi-direct ?

Montrer que le produit semi-direct $N \underset{\varphi}{\rtimes} H$ est direct *si et seulement si* φ est le morphisme trivial *si et seulement si* $\{1_N\} \times H$ est distingué dans $N \underset{\varphi}{\rtimes} H$.

- Le produit semi-direct $N \underset{\varphi}{\rtimes} H$ est direct *si et seulement si* pour tous $n, n' \in N$ et $h, h' \in H$, on a
$$(n, h) \underset{\varphi}{\rtimes} (n', h') = (n', hh')$$
si et seulement si pour tous $n, n' \in N$ et $h \in H$, $n\varphi(h)(n') = nn'$ *si et*

seulement si pour tous $n' \in N$, $h \in H$, $\varphi(h)(n') = n'$ *si et seulement si* φ est le morphisme trivial.

◁ Pour tout $n \in N$ et $h, h' \in H$, on a

$$(n,h) \underset{\varphi}{\rtimes} (1_N, h') \underset{\varphi}{\rtimes} (n,h)^{-1} = (n\varphi(hh'h^{-1})(n^{-1}), hh'h^{-1})$$

On en déduit que φ est trivial *si et seulement si* $\{1_N\} \times H$ est distingué dans $N \underset{\varphi}{\rtimes} H$.

Il existe notamment des groupes que l'on peut décomposer en produits semi-directs d'autres groupes. Par exemple,

◁ $\mathfrak{S}_n$ est produit semi-direct du groupe alterné et du groupe engendré par une transposition.

◁ Le groupe des isométries affines est le produit semi-direct du groupe des translations par le groupe des isométries laissant invariant un point donné.

◁ Le groupe diédral peut aussi s'écrire comme un produit semi-direct naturel.

C) Sous-groupes et générateurs d'un groupe cyclique ⋆⋆⋆

Théorème 3.1.14: Sous-groupes d'un groupe cyclique

Soit G un groupe cyclique, d'ordre n.

◁ Tout sous-groupe de G est cyclique.

◁ En outre, pour tout $d \mid n$, G admet un unique sous-groupe d'ordre d.

Démonstration. ◁ On le montre pour $G = \mathbb{U}_n$ (possible aussi avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Soit $H \leqslant \mathbb{U}_n$.

— Soit $d = |H|$.
Pour $x \in H$, $x^d = x^{|H|} = 1$ donc $H \subseteq \mathbb{U}_d$. Par égalité des cardinaux, $H = \mathbb{U}_d$.

— Soit $d \mid n$. On a $\mathbb{U}_d \subseteq \mathbb{U}_n$ d'où l'existence. D'après ci-dessus, si H est un sous-groupe d'ordre d de $\mathbb{U}_n$, alors $H = \mathbb{U}_d$.

◁ Soit G cyclique d'ordre n. Soit $\theta : G \xrightarrow{\sim} \mathbb{U}_n$.
Pour tout H sous-groupe de G, $\theta(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ de même cardinal.
Pour tout H_0 sous-groupe de $\mathbb{U}_n$, $\theta^{-1}(H_0)$ est un sous-groupe de H de même cardinal.

Lemme 3.1.15: Ordre de a^k

Soit $a \in G$ tel que $\mathrm{ord}(a) = n$. Pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{ord}(a^k) = \frac{n}{n \wedge k}$$

Démonstration. Soit $d = n \wedge k$. Alors $\begin{cases} k = dk_0 \\ n = dk_0 \end{cases}$ avec $k_0 \wedge n_0 = 1$.

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N}^*, (a^k)^l = 1_G &\iff a^k l = 1_G \\ &\iff n \mid kl && \text{car } \operatorname{ord}(a) = n \\ &\iff n_0 \mid k_0 l \\ &\iff n_0 \mid l && \text{par lemme de Gauss} \end{aligned}$$

D'où $\operatorname{ord}(a^k) = n_0 = \dfrac{n}{d}$.

Théorème 3.1.16: Générateurs d'un groupe cyclique

Soit G un groupe cyclique d'ordre n, et $a \in G$ tel que $G = \langle a \rangle$.
Alors les générateurs de G sont exactement les

$$\{a^k, k \in [\![0, n-1]\!], k \wedge n = 1\}$$

Donc G a exactement $\varphi(n)$ générateurs.

Démonstration. $\langle a^k \rangle = G \iff \operatorname{ord}(a^k) = n \iff \dfrac{n}{n \wedge k} = n \iff n \wedge k = 1$.

D) Exposant d'un groupe abélien ⋆⋆

Lemme 3.1.17: Ordre d'un produit

Soit $(G, .)$ un groupe abélien. Soient $x, y \in G$ tels que $\operatorname{ord}(x) \wedge \operatorname{ord}(y) = 1$. Alors $\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord}(x)\operatorname{ord}(y)$.

Attention, cela devient faux quand le PGCD est différent de 1 (le voir avec $y = x^{-1}$ par exemple).

Démonstration. On note $\begin{cases} n = \operatorname{ord}(x) \\ p = \operatorname{ord}(y) \end{cases}$. On suppose $n \wedge p = 1$.

Montrons que $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1_G\}$. En effet si $z \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$, $\begin{cases} \operatorname{ord}(z) \mid n \\ \operatorname{ord}(z) \mid p \end{cases}$ et donc $\operatorname{ord}(z) \mid n \wedge p = 1$. Donc $z = 1_G$.

Si $k \in \mathbb{Z}$, $(xy)^k = x^k y^k = 1_G \iff x^k = y^{-k} \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ Ainsi,

$$(xy)^k = 1_G \iff \begin{cases} x^k = 1_G \\ y^{-k} = 1_G \end{cases} \iff \begin{cases} n \mid k \\ p \mid k \end{cases} \underset{n \wedge p = 1}{\iff} np \mid k$$

Proposition 3.1.18: Exposant d'un groupe abélien

Soit $(G,.)$ un groupe abélien fini. Alors il existe $z \in G$ tel que $\mathrm{ord}(z) = \bigvee_{g\in G} \mathrm{ord}(g)$

Démonstration. On montre que si $(x,y) \in G^2$ il existe un élément $z \in G$ d'ordre $\mathrm{ord}(x) \vee \mathrm{ord}(y)$. Après, par récurrence bornée, on applique à tous les éléments de G.

◁ Notons $n = \prod_{i=1}^{d} q_i^{\alpha_i}$ et $p = \prod_{i=1}^{d} q_i^{\beta}$ avec $(q_1,\dots,q_d) \in \mathbb{P}^d$ et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$.
Ainsi $n \vee p = \prod_{i=1}^{d} q_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$.
Quitte à renuméroter, on suppose $\begin{cases} \forall i \in [\![1\,,\delta]\!], \max(\alpha_i,\beta_i) = \alpha_i \\ \forall i \in [\![\delta+1\,,d]\!], \max(\alpha_i,\beta_i) = \beta_i \end{cases}$. Alors,

$$n = \left(\prod_{i=1}^{\delta} q_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=\delta+1}^{d} q_i^{\alpha_i}\right) \text{ et } p = \left(\prod_{i=1}^{\delta} q_i^{\beta_i}\right)\left(\prod_{i=\delta+1}^{d} q_i^{\beta_i}\right)$$

Ainsi $n \vee p = n_0 p_0$ avec $n_0 \wedge p_0 = 1$.

◁ Comme $n = n_0 n_1$ et $\mathrm{ord}(x) = n$, $\mathrm{ord}(x^{n_1}) = n_0$.
De même, $\mathrm{ord}(x^{p_1}) = p_0$. Ainsi

$$\mathrm{ord}(x^{p_1}x^{n_1}) = n_0 p_0 = n \vee p$$

Corollaire 3.1.19

Si G est un groupe abélien fini, $\bigvee_{g\in G} \mathrm{ord}(g) = \max_{g\in G} \mathrm{ord}(g)$.

Démonstration. ◁ On a clairement $\max_{g\in G} \mathrm{ord}(g) \mid \bigvee_{g\in G} \mathrm{ord}(g)$.

◁ D'après ci-dessus, il existe $z \in G$, $\mathrm{ord}(z) = \bigvee_{g\in G} \mathrm{ord}(g)$. D'où la deuxième inégalité.

E) Groupes particuliers

E.1 Groupe de cardinal premier ⋆⋆⋆⋆

Proposition 3.1.20

Soit G un groupe de cardinal $p \in \mathbb{P}$. Alors :

$$G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Démonstration. Soit $g \in G \backslash \{1_G\}$. $\mathrm{ord}(g) \mid |G| = p$. Comme $\mathrm{ord}(g) \neq 1$, $\mathrm{ord}(g) = p$.
Ainsi G est cyclique d'ordre p (donc abélien) et on a l'isomorphisme de groupes : $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

E.2 Groupe dont tous les éléments sont d'ordre $\leqslant 2$ ⋆⋆⋆

Proposition 3.1.21

Soit G un groupe tel que pour tout $g \in G$, $\mathrm{ord}(g) \in \{1, 2\}$. Alors :

- G est abélien ;
- Si de plus G est fini,

$$\exists n \in \mathbb{N}, G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$$

Démonstration. On a pour tout $g \in G$, $g^2 = 1_G$.

- G abélien : Par hypothèse pour tout $g \in G$, $g^{-1} = g$.
  Alors si $(a, b) \in G^2, ba = b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1} = ab$.
- Isomorphisme : Supposons maintenant G fini. **Attention, principe de démonstration un peu spécial, à bien retenir.**
  Rappelons que pour tout $g \in G$, $g^2 = 1_G$. On peut munir G d'une structure de $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel :

$$\theta : \begin{cases} (\mathbb{F}_2, G) & \longrightarrow & G \\ (\overline{\varepsilon}, g) & \longmapsto & g^{\varepsilon} \end{cases}$$

  Comme G est de cardinal fini, sa dimension en tant que $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel est finie. Donc G est isomorphe en tant que $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel, en tant que groupe à $\mathbb{F}_2^d$ où $d = \dim_{\mathbb{F}_2}(G)$

E.3 Groupe diédral ⋆

Définition 3.1.22: Groupe diédral

Soit E le plan vectoriel euclidien. Notons P_n le polygône régulier à n côtes inclus dans le cercle unité, ses sommets ont pour affixe $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)_{k\in[\![0\,,n-1]\!]}$.

Alors $\mathbb{D}_n = \{u \in \mathcal{O}(E), u(P_n) = P_n\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé *groupe diédral d'ordre n*.

$\mathbb{D}_n$ est l'ensemble des isométries du plan affine qui conservent globalement les sommets d'un n-gone régulier. Il contient $2n$ éléments :

- n rotations d'angle $\left(\frac{2k\pi}{n}\right)_{k\in[\![0\,,n-1]\!]}$;
- n réflexions (ou symétries) : si n est pair, il y a deux familles de réflexions : celles dont l'axe joint un sommet au sommet opposé, et celles dont l'axe joint le milieu d'un côté au milieu du côté opposé. Si n est impair, il n'y a qu'une famille de réflexions. Leurs axes joignent un sommet au milieu du côté opposé.

Proposition 3.1.23: Système de générateurs de $\mathbb{D}_n$

Soit r est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Alors :

$$\mathbb{D}_n = \langle r, s\rangle = \{\mathrm{id}, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$$

Notons alors que r^k est la rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ pour $k \in [\![0\,, n-1]\!]$. Rappelons également que $s^2 = \mathrm{id}$.

Démonstration. Soit $\tau \in \mathbb{D}_n$.

- Si τ est une rotation, il existe $k \in [\![0\,, n-1]\!]$ tel que $\tau = r^k$.
- Si τ est une symétrie, alors $s \circ \tau$ est une rotation (la composée de deux réflexions d'axes concourants en O, (Ox) et (Oy), et une rotation d'angle $2((Ox), (Oy))$)
  Donc $s \circ \tau = r^k$ pour un certain k et $\tau = s \circ r^k$.

F) Actions de groupe ⋆⋆

F.1 Définition

Soit G un groupe et X un ensemble non-vide.

Définition 3.1.24

Une *action de groupe* de G sur X est donnée par un morphisme

$$\rho : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ g & \longmapsto & \rho_g \end{array} \right.$$

Pour $(g, g') \in G^2$, $\rho_{gg'} = \rho_g \circ \rho_{g'}$.

Exemple 3.1.25

- G agit sur lui-même par translation à gauche (qui est injective).
- G agit sur lui-même par conjugaison.

F.2 Stabilisateur, orbite

Définition 3.1.26

Soit $x \in X$. On définit :

- *L'orbite de* x comme $\mathrm{Orb}(x) = \{\rho_g(x), g \in G\} \subseteq X$.
- *Le stabilisateur de* x comme $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G, \rho_g(x) = x\} \leqslant G$.

Proposition 3.1.27: Formule aux classes

Si G et X sont des ensembles finis, pour $x \in X$,

$$|\mathrm{Stab}(x)| \cdot |\mathrm{Orb}(x)| = |G|$$

Démonstration. Soit $y \in \mathrm{Orb}(x)$. Alors on dispose de $h \in G$ tel que $y = \rho_h(x)$.

- Montrons que $\{g \in G, \rho_g(x) = y\} = h\mathrm{Stab}(x)$.

$$\begin{aligned} \rho_g(x) = y &\iff \rho_g(x) = \rho_h(x) \\ &\iff \rho_{h^{-1}g}(x) = x \\ &\iff h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x) \\ &\iff g \in h\mathrm{Stab}(x) \end{aligned}$$

- $G = \bigsqcup_{y \in \mathrm{Orb}(x)} \{g \in G, \rho_g(x) = y\}$ d'où

$$\begin{aligned} |G| &= \sum_{y \in \mathrm{Orb}(x)} |\{g \in G, \rho_g(x) = y\}| \\ &= \sum_{y \in \mathrm{Orb}(x)} |\mathrm{Stab}(x)| \\ |G| &= |\mathrm{Stab}(x)|.|\mathrm{Orb}(x)| \end{aligned}$$

F.3 Centre

Définition 3.1.28

On définit le *centre* d'un groupe par $Z(G) = \{g \in G, \forall h \in G, gh = hg\}$.

Si G est abélien $Z(G) = G$.

Proposition 3.1.29: Centre d'un p^α

Soit G un groupe fini de cardinal p^α. Alors $|Z(G)| \geqslant p$.

Démonstration. On considère l'action par conjugaison.
Soit $a \in G$, alors $\mathrm{Orb}(a) = \{gag^{-1}, g \in G\}$ et $|\mathrm{Orb}(a)| = 1 \iff a \in Z(G)$.
Les orbites forment une partition de G, soient donc $(a_1, \dots, a_n)$ des représentatns de chaque orbite, avec par exemple $a_1, \dots, a_d \in Z(G)$ et $|\mathrm{Orb}(a_j)| \geqslant 2$ pour $j \geqslant d+1$.

$$\begin{aligned} p \mid p^\alpha = |G| &= \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{Orb}(a_j)| \\ &= |Z(G)| + \sum_{j=d+1}^{n} |\mathrm{Orb}(a_j)| \\ &= |Z(G)| + \sum_{j=d+1}^{n} \underbrace{\frac{p^\alpha}{|\mathrm{Stab}(a_j)|}}_{= \frac{p^\alpha}{p^{\beta_j}} \text{ car } |\mathrm{Stab}(a_j)| \mid |G|} \\ &= |Z(G)| + \underbrace{(n-d)\, \underbrace{p^{\alpha-\beta_j}}_{\neq 1}}_{\text{divisible par } p} \end{aligned}$$

Donc $p \mid |Z(G)| \geqslant 1$ d'où le résultat.

Proposition 3.1.30

Soit G un groupe fini de cardinal p^2. Alors G est abélien.

Démonstration. Par la Proposition 3.1.29, $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$. Par l'absurde si $|Z(G)| = p < p^2$.
Soit $a \in G \backslash Z(G)$, alors comme $a \in \mathrm{Stab}(a)$ mais $Z(G) \subseteq \mathrm{Stab}(a)$, on a $\underbrace{|\mathrm{Stab}(a)|}_{\text{divise } p^2} \geqslant p+1$.

Donc $|\mathrm{Stab}(a)| = p^2$ et $a \in Z(G)$: impossible.

G) Groupes quotient ⋆

G.1 Définition, structure

Théorème 3.1.31: Structure de groupe du quotient

Soit G un groupe, et H un sous-groupe distingué de G (*voir Définition 3.1.9*).
On définit la relation $\equiv \ldots [H]$ sur G par :

$$x \equiv y[H] \iff x^{-1}y \in H \underset{\text{car } H \text{ distingué}}{\iff} xy^{-1} \in H$$

Alors :

- ◁ La relation $\equiv \ldots [H]$ est une relation d'équivalence, appelée relation de congruence pour la loi de G.
- ◁ La loi sur le quotient se traduit par le produit élément par élément

$$(ab)H = (aH)(bH) = \{x.y, x \in aH, y \in bH\}$$

- ◁ La loi induite sur le quotient munit celui-ci d'une structure de groupe.

Démonstration. ◁ Relation de congruence : La réflexivité est évidente car $1_H \in H$. La symétrie provient de la stabilité par inversion de H. La transitivité provient de la stabilité par produit. De plus cette relation d'équivalence est une congruence :

$$\text{Si } x \equiv x'[H] \text{ et } y \equiv y'[H], \text{ montrons que } x'y' \equiv xy[H]$$

On dispose de $(h_1, h_2) \in H^2$ tels que $x' = xh_1$ et $y' = yh_2$. Alors,
$x'y' = x(h_1y)h_2$ donc il existe $h_1' \in H$, $x'y' = x(yh_1')h_2 = xy\underbrace{(h_1'h_2)}_{\in H}$ d'où le résultat.

◁ Correspondance avec le produit élément par élément : Soient $(a, b) \in G^2$. On montre que :

$$(ab)H = (aH) \times (bH)$$

- — Si $z \in (ab)H$, $z = abh = (a1_H)(bh) \in (aH)(bH)$.
- — Si $z \in (aH)(bH)$, $z = (ah_1)(bh_2) = a(h_1b)h_2$ d'où comme précédemment, $a(bh_1')h_2 = (ab)\underbrace{(h_1'h_2)}_{\in H} \in (ab)H$

◁ Structure de groupe : On définit la loi $\overline{\times}$ sur $G/H = gH, g \in G$ par :

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in G, \overline{a}\overline{\times}\overline{b} = \overline{ab}$$

On vérifie aisément que cette loi est associative, admet un neutre $\overline{1_G} = H$ et que chaque élément admet un inverse.

Définition 3.1.32: Groupe quotient par un sous-groupe distingué

Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On note (G/H) le groupe défini sur l'ensemble quotient par la loi induite, telle que décrite dans le théorème précédent.

Si G est un groupe abélien, tout sous-groupe de G est distingué et on peut quotienter par ce sous-groupe. Par ailleurs le groupe quotient résultant sera abélien (vérification facile). De même le quotient d'un groupe cyclique sera cyclique.

G.2 Passage d'un morphisme au quotient

On note

$$\pi : \begin{cases} G & \longrightarrow & (G/H) \\ g & \longmapsto & \overline{g}^H = gH = Hg \end{cases}$$

le morphisme de projection.

Lemme 3.1.33: Passage au quotient d'un morphisme de groupe

Soit $f : G \longrightarrow K$ un morphisme de groupes et H un sous-groupe distingué de G. Alors f passe au quotient et définit

$$\tilde{f} : G/H \longrightarrow K$$

telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$ *si et seulement si* $H \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que $H \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit invariant sur les classes d'équivalence de $\equiv ...[H]$. Soit $a \in G$.

- ◁ Si $H \subseteq \mathrm{Ker}(f)$: Soient $x, y \in aH$, écrivons $x = ah_1$ et $y = ah_2$.
  $f(x) = f(a)f(h_1) = f(a)$ car $h_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et de même $f(y) = f(a) = f(x)$.
- ◁ Si $H \subsetneq \mathrm{Ker}(f)$: Soit $h \in H \backslash \mathrm{Ker}(f)$. On a $f(h) \neq 1_K = f(1_G)$. f prend donc des valeurs distinctes sur deux éléments d'une même classe. f ne passe pas au quotient.

Théorème 3.1.34: Premier théorème d'isomorphisme

Soit $f : G \longrightarrow K$ un morphisme de groupes. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe distingué de G et f passe au quotient, définissant un morphisme de groupes injectif

$$\tilde{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow K$$

Ainsi,

$$\tilde{f}^{|\mathrm{Im}\, f} : G/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow K \text{ est un isomorphisme de groupes}$$

Démonstration. ◁ $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe distingué de G : l'écrire.

◁ f passe au quotient : d'après le Lemme 3.1.33, f passe au quotient.

◁ $\tilde{f}$ est un morphisme de groupes : si $a, b \in G$,
$\tilde{f}(\overline{a}\overline{\times}\overline{b}) = \tilde{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \tilde{f}(\overline{(a)})\overline{\times}\tilde{f}(\overline{b})$

◁ Injectivité de $\tilde{f}$:
$\mathrm{Ker}(\tilde{f}) = \{\overline{a}, \tilde{f}(\overline{a}) = 1_K\} = \{\overline{a}, f(a) = 1_K\} = \{\overline{1_G}\}$ d'où l'injectivité.

Exemple 3.1.35: Quelques exemples de groupes quotients

◁ Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est défini comme le quotient du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ par son sous-groupe distingué $n\mathbb{Z}$.

◁ Soit $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ et $f : \begin{cases} G & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ z & \longmapsto & |z| \end{cases}$. Ce morphisme est surjectif, son noyau est $\mathbb{U}$. On en déduit que :

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}_+^*$$

◁ On prend $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\det : G \longrightarrow \mathbb{R}^*$ le déterminant. On sait que det est un morphisme surjectif, de noyau $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$$

◁ G/G est un groupe trivial.

◁ $G/\{e\}$ est isomorphe à G.

Exemple 3.1.36: Lien avec le produit semi-direct vu plus tôt

Soient N et H des groupes et soit $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. Identifier le quotient de $N \underset{\varphi}{\rtimes} H$ par $N \times \{1_H\}$.

◁ On dispose d'une application naturelle $\pi : N \underset{\varphi}{\rtimes} H \longrightarrow H$ donné par la seconde projection ($\pi(n, h) = h$). Il est clair que π est un morphisme de groupes surjectif.

◁ Calculons son noyau : Soient $n \in N$ et $h \in H$. On a $\pi(n, h) = 1_H$ *si et seulement si* $h = 1_H$, donc $\mathrm{Ker}(\pi) = N \times \{1_H\}$.

◁ Finalement, π passe au quotient par son noyau et induit, d'après le premier théroème d'isomorphisme, un isomorphisme de groupes :

$$\overline{\pi} : \left(N \underset{\varphi}{\rtimes} H\right) / \left(N \times \{1_H\}\right) \xrightarrow{\sim} H.$$

II) Groupe symétrique

A) Décomposition cyclique d'une permutation ⋆⋆⋆⋆

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. On définit une relation sur $[\![1\,,n]\!]$ par :

$$a \sim_\sigma b \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \sigma^k(a) = b$$

C'est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de a est notée $\mathrm{Orb}_\sigma(a)$, c'est **l'orbite** de a par σ.
Ainsi $\mathrm{Orb}_\sigma(a) = \{\sigma^i(a), i \in \mathbb{N}\}$.

Définition 3.2.1: Cycle

Un *cycle* est une permutation telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, et $i_1, \dots, i_k$ des éléments 2-à-2 distincts de $[\![1\,,n]\!]$ tels que :

- $\forall l \in [\![1\,,k-1]\!], \sigma(i_l) = i_{l+1}$ et $\sigma(i_k) = i_1$
- $\forall l \in [\![1\,,n]\!] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}, \sigma(i) = i$

Toutes les orbites sauf une sont réduites à un point.

Ainsi $\exists! a \in [\![1\,,n]\!], \mathrm{Orb}(a) = \{\sigma^i(a), i \in [\![0\,,|Orb(a)|-1]\!]\}$.

Définition 3.2.2: Support d'une permutation

Le support d'une permutation σ, noté $\mathrm{Supp}(\sigma)$ est l'ensemble des éléments qui ne sont pas laissés fixes par σ.
Dans le cas d'un cycle, le support est l'orbite non-réduite à un point.

Théorème 3.2.3: Décomposition en cycles à supports disjoints

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors σ s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints et cette écriture est unique à l'ordre près des facteurs.

B) Conjugaison ⋆⋆⋆⋆

Théorème 3.2.4

Soient $\tau = (a_1 \dots a_d)$ un d-cycle et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors

$$\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \dots \sigma(a_d))$$

Si $\sigma_0 = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_d$ où $\tau_i = (a_{i1}, \dots, a_{id_i})$ décomposition en cycles à supports disjoints,

$$\sigma \circ \sigma_0 \circ \sigma^{-1} = \tilde{\tau_1} \circ \cdots \circ \tilde{\tau_d} \text{ où } \tilde{\tau_j} = (\sigma(a_{i1}) \dots \sigma(a_{id_i}))$$

Proposition 3.2.5

Les transpositions sont toujours conjuguées.

Démonstration. Si $\tau = (a\ b)$ et $\tau' = (c\ d)$, on définit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ par

$$\begin{cases} \sigma(a) = c \\ \sigma(b) = d \\ [\![1\,,n]\!]\,\sigma\{a,b\} \overset{\sigma}{\simeq} [\![1\,,n]\!]\,\sigma\{c,d\} \end{cases}, \text{ alors } \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \tau'$$

Proposition 3.2.6

Deux permutations à supports disjoints commutent.

Démonstration. C'est intuitif.

C) Ordre d'une permutation ⋆⋆⋆⋆

C.1 Ordre d'un cycle

Proposition 3.2.7

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un cycle de longueur l. Alors,

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = l$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $j \in [\![1\,,l]\!]$.
Alors $\sigma^k(a_j) = a_{\overline{k+j}^l}$. Ainsi $\sigma^l = \mathrm{id}$.
Si $k < l$, $\sigma^k(a_1) = a_{1+k} \neq a_1$ donc $\mathrm{ord}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = l$.

C.2 Ordre d'une permutation

Proposition 3.2.8

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors, soit $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_N$ sa décomposition en cycles à supports disjoints de longueurs $l_1, \ldots, l_N$. Ainsi,

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \bigvee_{j=1}^{N} l_j$$

Démonstration. Comme les τ_i sont à supports disjoints et commutent, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sigma^k = \tau_1^k \circ \cdots \circ \tau_N^k$$

Comme $\mathrm{Supp}(\tau_i^k) \subseteq \mathrm{Supp}(\tau_i)$, les $(\tau_i^k)_{i\in[\![1\,,n]\!]}$ sont des permutations (pas forcément des cycles) à supports disjoints.
Par unicité de la décomposition,

$$\begin{aligned}\sigma^k = \mathrm{id} &\iff \forall j \in [\![1\,,N]\!]\,, \tau_j^k = \mathrm{id}\\ &\iff \forall j \in [\![1\,,N]\!]\,, \underbrace{\mathrm{ord}(\tau_j)}_{=l_j} \mid k \iff \bigvee_{j=1}^{N} l_j \mid k\end{aligned}$$

D) Générateurs de $\mathfrak{S}_n$ ⋆⋆⋆

Proposition 3.2.9

Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$

Démonstration. ◁ Les cycles engendrent $\mathfrak{S}_n$ d'après le Théorème 3.2.3.

◁ Soit $\sigma = (a_1 \dots a_l)$ un cycle. On a : $\sigma = \prod_{i=1}^{l-1}(a_i\ a_{i+1})$

Proposition 3.2.10

Les transpositions $((i\ i+1))_{i\in[\![1\,,n-1]\!]}$ engendrent $\mathfrak{S}_n$

Démonstration. Soit $(i\ j)$ avec $j > i$. On montre que $(i\ j) \in \langle((i\ i+1))_{i\in[\![1\,,n-1]\!]}\rangle$ par récurrence sur $j - i \in [\![1\,,n-1]\!]$.

◁ Initialisation : $j - i = 1$ et $(i\ j) = (i\ i+1)$

◁ Hérédité : Supposons $j = i + k + 1$. Par H.R., $(i\ i+k) \in H$. Or :

$$(i\ j) = (i+k\ i+k+1)(i\ i+k)(i+k\ i+k+1) \in H$$

Proposition 3.2.11

Les transpositions $((1\ i))_{i\in[\![1\,,n-1]\!]}$ engendrent $\mathfrak{S}_n$

Démonstration. Remarquer que $(i\ j) = (1\ j)(1\ i)(1\ j)$

Proposition 3.2.12

Ces trois systèmes de générateurs sont minimaux : $n-1$ est le nombre minimal de transpositions pour engendrer $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration. Il s'agit ici d'un argument classique de théorie des graphes.
Soit $E \subseteq \mathfrak{S}_n$ un ensemble de transpositions, qu'on suppose générateur de $\mathfrak{S}_n$.
Soit $\Gamma = (\llbracket 1\,,n\rrbracket\,, \{i,j,(i\ j) \in E\})$ un graphe non-orienté, qui est connexe puisque $\langle E\rangle = \mathfrak{S}_n$.
Il reste donc à montrer qu'un graphe connexe à n sommets possède au moins $(n-1)$ arêtes, par récurrence sur n :

- ◁ Initialisation (n=2) : c'est évident.
- ◁ Hérédité : Supposons $|\Gamma| = n+1$.
  - — Si chaque sommet a au moins 2 voisins, alors Γ a au moins $|\Gamma| = n+1$ arêtes.
  - — Sinon, il existe un sommmet s qui n'a qu'un unique voisin.
    Considérons $\Gamma' = \Gamma\backslash\{s\}$ (on retire le sommet et les arêtes adjacentes). Γ' est connexe à n sommets, donc par hypothèse de récurrence, Γ' admet au moins $n-1$ arêtes, donc Γ a au moins n arêtes.

Cela conclut la preuve par récurrence.

Proposition 3.2.13

$(1\ 2\ \ldots\ n)$ et $(1\ 2)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration. Remarquer qu'on engendre les $((i\ i+1))_{i\in\llbracket 1\,,n-1\rrbracket}$ en appliquant $(1\ 2\ \ldots\ n)$ à $(1\ 2)$ successivement.

E) Signature ⋆⋆⋆⋆

Définition 3.2.14: Définitions équivalentes de la signature

- ◁ Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$
- ◁ $\varepsilon = (-1)^{N_\sigma}$ où N_σ est le nombre d'inversions, c'est-à-dire

$$N_\sigma = \left|\left\{(i,j) \in \llbracket 1\,,n\rrbracket^2\,, i<j, \sigma(i)>\sigma(j)\right\}\right|$$

- ◁ ε est l'unique morphisme de groupes non-trivial de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ vers $(\{\pm 1\}, \times)$

Proposition 3.2.15: Valeurs remarquables

- ◁ Si τ est une transposition, $\varepsilon(\tau) = -1$
- ◁ Si σ est un cycle de longueur p, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$

Démonstration. ◁ On note $\tau = (i\ j)$, $i < j$ sans perte de généralité. Alors on peut écrire

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

Compter le nombre d'inversions de τ revient à compter, pour chaque terme de la seconde ligne, le nombre de termes qui le suivent et qui lui sont inférieurs. D'une telle manière,

$$N(\sigma) = \underset{1}{0} + \dots + \underset{i-1}{0} + \underset{i}{(j-i)} + \underset{i+1}{1} + \dots \underset{j-1}{1} + \underset{j}{0} + \dots + \underset{n}{0} = 2(j-i)+1$$

Donc, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$.

◁ Tout p-cycle s'écrit comme produit de $p-1$ transpositions d'après la Proposition 3.2.9, chacune de signature -1.

Remarque 3.2.16

ε est le seul morphisme non-trivial de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Démonstration. Soit φ ; $\mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes.
Pour toute transposition τ, $\tau^2 = \mathrm{id}$. Par morphisme, $\varphi(\tau)^2 = \mathrm{id}$.
Ainsi, $\varphi(\tau) \in \{+1, -1\}$.
Soient τ et τ' deux transpositions, qui sont conjuguées d'après la Proposition 3.2.5. Soit donc σ, tel que

$$\tau' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$$

Alors,

$$\varphi(\tau') = \varphi(\sigma) \circ \varphi(\tau) \circ \varphi(\sigma)^{-1} = \varphi(\tau)$$

Ainsi, soit $\varphi = \mathrm{id}$, soit φ vaut -1 pour toute transposition, et auquel cas on a $\varphi = \varepsilon$.

F) Sous-groupe alterné ⋆⋆

Définition 3.2.17

On pose $\mathcal{A}_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$.
De plus, $|\mathcal{A}_n| = \dfrac{n!}{2}$.

Démonstration. $\varepsilon :\longrightarrow \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupe surjectif.
D'où $\mathfrak{S}_n = \varepsilon^{-1}\{1\} \sqcup \varepsilon^{-1}\{-1\}$ et $|\varepsilon^{-1}\{1\}| = |\varepsilon^{-1}\{-1\}| = |\mathcal{A}_n|$.

III) Anneaux et arithmétique

Fixons, pour cette partie, $\mathbb{K}$ un corps.

A) Indicatrice d'Euler ⋆⋆⋆⋆

A.1 Définition et multiplicativité

Définition 3.3.1: Indicatrice d'Euler

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \longmapsto & |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \end{array} \right.$$

Lemme 3.3.2

Soient A_1 et A_2 deux anneaux.
Si $\theta : A_1 \longrightarrow A_2$ est un morphisme d'anneaux,

$$z \in A_1^* \iff \theta(z) \in A_2^*$$

et $|A_1^*| = |A_2^*|$ en cas de finitude des groupes.

Démonstration.

$$\begin{aligned} z \in A_1^* &\iff \exists y \in A_1, yz = zy = 1_{A_1} \\ &\iff \exists y \in A_1, \theta(y)\theta(z) = \theta(z)\theta(y) = 1_{A_2} && \text{par injectivité} \\ &\iff \exists x \in A_2, x\theta(z) = \theta(z)x = 1_{A_2} && \text{par surjectivité} \\ &\iff \theta(z) \in A_2^* \end{aligned}$$

Théorème 3.3.3: Multiplicativité de φ

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

Démonstration. Si $m = 1$ ou $n = 1$ c'est évident.
Sinon on applique le lemme chinois, on considère un isomorphisme d'anneaux

$$\overline{\theta} : (\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(mn) &= |(\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z})^*| \\
&= |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \\
&= |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| && \text{par le Lemme 3.3.2} \\
&= |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*| \times |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \\
&= \varphi(m)\varphi(n)
\end{aligned}$$

A.2 Valeurs particulières

Lemme 3.3.4

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathbb{P}$. Alors

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\varphi(p^\alpha) &= |\{k \in [\![1, p^\alpha]\!], k \wedge p^\alpha = 1\}| \\
&= p^\alpha - |\{k \in [\![1, p^\alpha]\!], k \wedge p^\alpha \neq 1\}| \\
&= p^\alpha - |\{k \in [\![1, p^\alpha]\!], p \mid k\}| \\
&= p^\alpha - \frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}}| \\
&= p^\alpha - p^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Théorème 3.3.5: Décomposition en facteurs premiers

Soit $n = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j}$, avec $(p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{P}^d$ 2-à-2 distincts et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in (\mathbb{N}^*)^d$. Alors,

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{d} \left(p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j - 1}\right) = n \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$

Démonstration. Appliquer la multiplicativité puis le Lemme 3.3.4.

Corollaire 3.3.6

$$\varphi(n) \mid n \iff \prod_{j=1}^{d} \frac{p_j}{p_j - 1} \in N^*$$

Corollaire 3.3.7

Si $\varphi(n) \mid n$,

$$v_2\left(\prod_{j=1}^{d} p_j\right) \geqslant v_2\left(\prod_{j=1}^{d}(p_j-1)\right)$$

Démonstration. Corollaires immédiats.

A.3 Egalité très classique $n = \sum_{d\mid n} \varphi(d)$

Proposition 3.3.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$n = \sum_{d\mid n} \varphi(d)$$

Démonstration. On note $\mathbb{V}_n$ l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité. C'est-à-dire que

$$\mathbb{V}_n = \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!], k \wedge n = 1\right\}$$

On a $n = |\mathbb{U}_n|$. Or, pour $z \in \mathbb{U}_n$, $\mathrm{ord}(z) \mid n$. Mais :

$$\mathbb{U}_n = \bigcup_{d\mid n} \underbrace{\{z \in \mathbb{U}_n, \mathrm{ord}(z) = d\}}_{=H_d}, \text{ c'est une partition.}$$

- ◅ Si $z \in H_d$, $\mathrm{ord}(z) = d$ et $z \in \mathbb{U}_d$ donc $z \in \mathbb{V}_d$.
- ◅ Si $z \in \mathbb{V}_d$, comme $\mathbb{U}_d \subseteq \mathbb{U}_n$, $z \in \mathbb{U}_n$ avec $\mathrm{ord}(z) = d$ d'où $z \in H_d$.

Finalement, $n = |\mathbb{U}_n| = \sum_{d\mid n} |\mathbb{V}_d| = \sum_{d\mid n} \varphi(d)$.

A.4 Nilpotence dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition 3.3.9

Soit $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $n = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j}$ la décomposition en facteurs premiers de n.

Alors $\overline{k}$ est nilpotent dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *si et seulement si* $\prod_{j=1}^{d} p_i \mid k$.

Démonstration. $\lhd$ $\underline{\Rightarrow}$: Supposons $\overline{k}$ nilpotente. On dispose de $l \geqslant 1$, $\overline{k}^l = 0$, soit $n \mid k^l$. Donc pour $i \in [\![1\,,d]\!]$, $p_i \mid k^l$ donc $p_i \mid k$. Ainsi $\prod_{j=1}^{d} p_i \mid k$.

$\lhd$ $\underline{\Leftarrow}$: Supposons $\prod_{j=1}^{d} p_i \mid k$. On note $k = \left(\prod_{j=1}^{d} p_i\right) m$. Soit $\beta = \max_{i\in[\![1\,,d]\!]} \alpha_i$. $k^\beta = \left(\prod_{j=1}^{d} p_i^\beta\right) m^\beta$. Or $\prod_{j=1}^{d} p_i^\beta \mid n$ d'où $\overline{k}^\beta = \overline{0}$.

B) Inversion de Möbius ⋆⋆⋆

B.1 Fonctions arithmétiques

Définition 3.3.10

Soit $f : \mathbb{N}^* \longmapsto \mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'alors f est une fonction *arithmétique*. Une telle fonction est multiplicative si :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \wedge n = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$$

Proposition 3.3.11: Loi sur les fonctions arithmétiques

On définit sur l'ensemble des fonctions artihmétiques la loi de composition interne $\star$:

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*,\mathbb{K})^2, f \star g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{d\mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \end{array} \right.$$

Cette loi est commutative, associative et dispose d'un neutre qui est donné par $\mathbb{1}_{\{1\}} : n \longmapsto \delta_{n=1}$.

Démonstration. $\lhd$ $\underline{\text{Commutativité}}$: Pour tout $(f,g) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*,\mathbb{K})^2$, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \star g)(n) = \sum_{\substack{(d,d')\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ dd'=n}} f(d)g(d')$$

$\lhd$ $\underline{\text{Associativité}}$: Soient f,g,h des fonctions arithmétiques. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f \star (g \star h)(n) &= \sum_{\substack{(d,d')\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ dd'=n}} f(d)(g\star h)(d') \\ &= \sum_{\substack{(d,d')\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ dd'=n}} \sum_{\substack{(\delta_1,\delta_2) \\ \delta_1\delta_2=d'}} f(d)g(\delta_1)h(\delta_2) \\ &= \sum_{\substack{(d,\delta_1,\delta_2)\in(\mathbb{N}^*)^3 \\ d\delta_1\delta_2=n}} f(d)g(\delta_1)h(\delta_2) \\ f \star (g \star h)(n) &= (f\star g)\star h(n) \end{aligned}$$

◅ Neutre : Le vérifier.

B.2 Fonction de Möbius

Définition 3.3.12: Fonction arithmétique de Möbius

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, sa décomposition en facteurs premiers : $n = \prod_{j=1}^{d} p_j^{\alpha_j}$. Posons :

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{N}^* & \longrightarrow \mathbb{K} \\ 1 & \longmapsto 1 \\ n = \prod_{j=1}^{d} p_j & \longmapsto (-1)^d \\ n = \prod_{j=1}^{d} p_j^{\alpha_j} \mid \exists j, \alpha_j \geqslant 2 & \longmapsto 0 \end{cases}$$

Proposition 3.3.13: Multiplicativité

μ est multiplicative.

Démonstration. Soient $(m,n) \in (N^*)^2$, premiers entre eux.

◅ S'il existe $p \in \mathbb{P}$ tel que $p^2 \mid n$ ou $p^2 \mid m$ alors $p^2 \mid mn$ et $\mu(mn) = 0 = \mu(m)\mu(n)$.

◅ Sinon $\begin{cases} m = \prod_{j=1}^{d} p_j \\ n = \prod_{j=1}^{d'} q_j \end{cases}$ où $\{p_j, j \in [\![1\,,d]\!]\} \cap \{q_j, j \in [\![1\,,d']\!]\} = \varnothing$.

Ainsi $mn = \prod_{j=1}^{d} p_j \prod_{j=1}^{d'} p_j$ tous premiers entre eux deux-à-deux.

Alors $\mu(mn) = (-1)^{d+d'} = (-1)^d(-1)^{d'} = \mu(m)\mu(n)$.

Proposition 3.3.14: Inverse de μ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mathbb{1}_{\{1\}}(n)$$

Démonstration. On a $\{d \in \mathbb{N}^*, d \mid n\} = \{\prod_{j=1}^{d} p_j^{\beta_j}, \forall j, \beta_j \in [\![0\,,\alpha_j]\!]\}$.

Mais par définition de μ :

$$\{d \in \mathbb{N}^*, d \mid n \text{ et } \mu_d \neq 0\} = \left\{ \prod_{j=1}^{d} p_j^{\beta_j}, \forall j \in [\![1\,,d]\!], \beta_j \in \{0,1\} \right\}$$

donc pour $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_d)\in\{0,1\}^d} \underbrace{\mu\left(\prod_{j=1}^{d} p_j^{\beta_j}\right)}_{=(-1)^k \text{ où } k=|\{j|\beta_j=1\}|} \\
&= \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \sum_{\substack{(\beta_1,\dots,\beta_d)\in\{0,1\}^d \\ |\{j|\beta_j=1\}|=k}} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (-1)^k \\
&= 0 \text{ par bînome de Newton}
\end{aligned}$$

B.3 Inversion de Möbius

Théorème 3.3.15: Formule d'inversion

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{K})$, on pose $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & \sum_{d|n} f(d) \end{array} \right.$. Alors :

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Démonstration. On a $g = f \star 1$. Or $f = f \star \mathbb{1}_{\{1\}} = f \star (1 \star \mu) = g \star \mu$.

Proposition 3.3.16: Convolution et multiplicativité

Si $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{K})$ sont multiplicatives, alors $f \star g$ est multiplicative.

Démonstration. Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \wedge n = 1$.

On écrit : $\left\{ \begin{array}{l} m = \prod_{j=1}^{q} p_j^{\alpha_j} \\ n = \prod_{j=d+1}^{q+q'} p_j^{\alpha_j} \end{array} \right.$ avec les (p_j) premiers entre eux deux-à-deux.

On a : $(f \star g)(mn) = \sum_{d|mn} f(d) g\left(\frac{mn}{d}\right)$ par définition. Considérons :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} \{d \mid mn\} & \longrightarrow \quad \{\delta \mid m\} \times \{\delta' \mid n\} \\ d = \prod_{j=1}^{q+q'} p_j^{\beta_j}, \text{ où } 0 \leqslant \beta_j \leqslant \alpha_j & \longmapsto \quad \left(\prod_{j=1}^{q} p_j^{\beta_j}, \prod_{j=q+1}^{q+q'} p_j^{\beta_j} \right) \end{array} \right.$$

qui est bijective d'inverse $(\delta, \delta') \mapsto \delta\delta'$. Donc :

$$\begin{aligned} (f \star g)(mn) &= \sum_{\substack{\delta|m \\ \delta'|n}} f(\delta\delta') g\left(\frac{mn}{\delta\delta'}\right) \\ &\overset{\delta \wedge \delta' = 1}{=} \sum_{\substack{\delta|m \\ \delta'|n}} f(\delta) f(\delta') g\left(\frac{m}{\delta}\right) g\left(\frac{n}{\delta'}\right) \\ &= \left(\sum_{\delta|m} f(\delta) g\left(\frac{m}{\delta}\right) \right) \left(\sum_{\delta'|n} f(\delta') g\left(\frac{n}{\delta'}\right) \right) \\ &= (f \star g)(m)(f \star g)(n) \end{aligned}$$

C) Anneaux $\mathbb{Z}[\alpha]$ ⋆⋆⋆

C.1 Définition

Lemme 3.3.17: important ! ⋆⋆⋆⋆

Si $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Si $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, alors $q \mid a_n$ et $p \mid a_0$

Démonstration. En effet

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0 \iff a_n p^n = -q \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k-1}$$

De plus $p^n \wedge q = 1$ d'où $q \mid a_n$.

De même $a_0 q^n = -p \sum_{k=1}^{n} a_k p^{k-1} q^{n-k}$ et $p \wedge q^n = 1$ d'où $p \mid a_0$.

Définition 3.3.18: Anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$

Soit $P = X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ sans racine rationnelle. Soient α et β les deux racines complexes de P. On note :

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{Q(\alpha), Q \in \mathbb{Z}[X]\}$$

C'est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Démonstration. Posons $\theta_\alpha : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ Q & \longmapsto & Q(\alpha) \end{cases}$ qui est un morphisme d'anneaux.
Or, $\mathbb{Z}[\alpha] = \theta_\alpha(\mathbb{Z}[X])$ et $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau donc $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Proposition 3.3.19

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{x + y\alpha, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Démonstration.
- $\subset$ $\Leftarrow$: évidente avec $Q_{x,y} = x + y\alpha$
- $\subset$ $\Rightarrow$: On a $P(\alpha) = 0$ d'où $\alpha^2 = -a\alpha - b$. De là, deux démonstrations possibles :
  - Par récurrence, on montre que $\alpha^n = x_n\alpha + y_n$ où $(x_n), (y_n) \in \mathbb{Z}^n$.
  - Par division euclidienne, $Q = \tilde{Q}P + \tilde{R}$ si $Q \in \mathbb{Z}[X]$, P étant unitaire ; on a $(\tilde{Q}, \tilde{R}) \in \mathbb{Z}[X]^2$, $\deg(\tilde{R}) \leqslant 1$ d'où

$$Q(\alpha) = 0 + \underbrace{x + \alpha y}_{=R(\alpha)}$$

Remarque 3.3.20

Par relations coefficients-racines, $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[\beta]$

Par exemple,
- $\mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss, très important en arithmétique.
- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$.

C.2 Conjugaison

Proposition 3.3.21

On définit :

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{Z}[\alpha] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\alpha] \\ x + \alpha y & \longmapsto & x + \beta y \end{cases}$$

τ est bien défini, et il s'agit d'un morphisme d'anneaux.

Démonstration. - Bonne définition : l'écriture $x + \alpha y$ est unique par irrationnalité de α.
En effet, si $x + \alpha y = x' + \alpha y'$, alors $(x - x') = \alpha(y - y')$. Si $y \neq y'$, alors $\alpha \in \mathbb{Q}$, c'est impossible. Alors, $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

◅ Morphisme : on montre que $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[\alpha], \tau(zz') = \tau(z)\tau(z')$.
Si $\begin{cases} z & = x + \alpha y \\ z' = x' + \alpha y' & \end{cases}$, $zz' = xx' + \alpha(yx' + y'x) + \underbrace{\alpha^2}_{=-a\alpha-b} yy'$
D'où $\tau(z)\tau(z') = \tau(zz')$.

Exemple 3.3.22: Conjugaison dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$

Dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, la conjugaison ressemble à celle dans $\mathbb{C}$:

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{Z}[\mathrm{i}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \\ x + \mathrm{i}y & \longmapsto & x - \mathrm{i}y \end{cases}$$

puisque $P = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

C.3 Norme et inversibilité

Posons $N : \begin{cases} \mathbb{Z}[\alpha] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ z & \longmapsto & \tau(z)z \end{cases}$. En effet si $z = x + y\alpha$,

$$\begin{aligned} N(z) &= (x + \beta y)(x + \alpha y) \\ &= x^2 + xy(\alpha + \beta) + \alpha\beta y^2 \\ &= x^2 - axy + by^2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Proposition 3.3.23: Inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$

$$\forall z \in \mathbb{Z}[\alpha], z \in (\mathbb{Z}[\alpha])^* \iff N(z) \in \{\pm 1\}$$

Démonstration. ◅ $\Rightarrow$: Si $zz' = 1$, $N(z)N(z') = N(1) = 1$ d'où $N(z) \in \{\pm 1\}$.
◅ $\Leftarrow$: Si $N(z) = \varepsilon$, alors $z\tau(z) = \varepsilon$ d'où $(\varepsilon\tau(z))z = 1$ et ainsi $z^{-1} = \varepsilon\tau(z)$.

Dans certains cas, on parvient à déterminer totalement $(\mathbb{Z}[\alpha])^*$.

D) Idéaux et anneaux principaux ⋆⋆⋆

Quelques rappels / remarques sur les idéaux :

◅ Si I est un idéal contenant un élément inversible, alors l'idéal est égal à l'anneau entier. La notion d'idéal de corps n'est donc pas pertinente.

◅ Un idéal n'est pas un sous-anneau. Sinon, il contiendrait le neutre et serait égal à l'anneau entier.

◅ Une intersection (même infinie) d'idéaux est un idéal

◅ Une somme finie d'idéaux est un idéal.

Définition 3.3.24: Idéal principal

Un idéal de la forme $(x_0) = x_0A$ pour $x_0 \in A$ est un *idéal principal*.

Définition 3.3.25: Anneau principal

Un *anneau principal* est un anneau dont tous les idéaux sont principaux.

Théorème 3.3.26: $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont principaux

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont anneaux principaux.

Démonstration. ◁ $\underline{\mathbb{Z}}$: tout idéal de $\mathbb{Z}$ est à fortiori un sous-groupe donc de la forme $a\mathbb{Z}$.

◁ $\underline{\mathbb{K}[X]}$: Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On le suppose non-trivial.
On considère $\mathcal{D} = \{\deg(A), A \in I \setminus \{0\}\}$ ensemble non-vide de $\mathbb{N}$. Soit $d_0 = \min \mathcal{D}$ et $A_0 \in I \setminus \{0\}$ tel que $\deg(A_0) = d_0$.

— On a $(A_0) = A_0\mathbb{K}[X] \subseteq I$.

— Soit $P \in I$. On réalise la division euclidienne de P par A_0,

$$P = A_0Q + R$$

avec $\deg(R) < d_0$. Or $R = P - A_0Q \in I$. Comme $\deg(R) \notin \mathcal{D}$, nécessairement $R = 0$.

Proposition 3.3.27

Soit $(A, +, .)$ un anneau principal. Alors toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire.

Démonstration. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_nA)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'idéaux.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ *id est* $a_{n+1} \mid a_n$. Soit $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

◁ $\underline{\mathcal{J} \text{ est un idéal}}$: Soient $(x, y) \in \mathcal{J}^2$. Il existe $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x \in I_n$ et $y \in I_p$.
Posons $k = \max(n, p)$. Par croissance, $(x, y) \in I_k^2$. Ainsi $x - y \in I_k \subseteq \mathcal{J}$.
Si $x \in \mathcal{J}$ et $a \in A$, $\exists n \in \mathbb{N}, x \in I_n$ d'où $ax \in I_n \subseteq \mathcal{J}$.

◁ $\underline{\text{On atteint } \mathcal{J}}$: On dispose de $b \in A$ tel que $\mathcal{J} = (b)$. Nécessairement $b \in \mathcal{J}$ donc on dispose de N tel que $b \in I_N$.
Ainsi, $(b) \subseteq (a_n) = I_N \subseteq \mathcal{J} = (b)$ d'où $\mathcal{J} = I_n$.
Pour tout $n \geqslant N$, $I_N = \mathcal{J} \subseteq I_n \subseteq \mathcal{J}$ et $I_n = \mathcal{J}$.

Lemme 3.3.28

Soit A un anneau commutatif, intègre et principal. Tout élément $a \in A$ non-inversible admet un diviseur irréductible.

Démonstration. Si a n'est pas irréductible, il admet un diviseur strict a_1 non-inversilbe, non associé à A. :

$$(a) \subsetneq (a_1) \subsetneq A$$

Si a_1 est irréductible, on a terminé, sinon il admet un diviseur strict a_2, non-inversible tel que

$$(a) \subsetneq (a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq A$$

Comme il n'existe pas de suite infinie strictement croissante d'idéaux par la Proposition 3.3.27, en un nombre fini d'étapes on obtient a_k irréductible.

Théorème 3.3.29: Décomposition en irréductibles

Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif, intègre et principal.
Alors tout élement non-inversible se décompose en produits d'irréductibles.

Plus précisément, soit $(P_i)_{i\in I}$ est une famille de représentats de chaque classe d'irréductibles associés. Alors, pour $a \in A\backslash A^*$, il existe :

$$\begin{cases} (i_1, \dots, i_d) \in I^d \text{ 2-à-2 distincts} \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in (\mathbb{N}^*)^d \\ u \in A^* \end{cases} \qquad \text{tels que } a = u \prod_{j=1}^{d} P_{i_j}^{\alpha_j}$$

et cette écriture est unique à l'ordre près des facteurs.

Démonstration. Unicité : On suppose $u \prod_{j=1}^{d} p_{i_j}^{\alpha_j} = v \prod_{k=1}^{d'} p_{j_k}^{\beta_k}$

- ◁ Soit $l \in [\![1, d]\!]$, $p_{i_l} \mid v \prod_{k=1}^{d'} p_{j_k}^{\beta_k}$. Comme p_{i_l} est irréductible, il est l'un des facteurs. Comme v est inversible, on dispose de $k \in [\![1, d]\!]$, $p_{i_l} \mid p_{j_k}$. Par irréductibilité de p_{j_k}, p_{i_l} et p_{j_k} sont associés donc égaux (il y a un seul représentant par classe). Ainsi $\{i_j, j \in [\![1, d]\!]\} = \{j_k, k \in [\![1, d']\!]\}$. L'autre inclusion se montre séparément donc $d = d'$.
- ◁ Quitte à renuméroter, on suppose $i_k = j_k$ pour tout k.
  Montrons que pour $j \in [\![1, d]\!]$, $\alpha_j = \beta_j$. Soit $k \in [\![1, d]\!]$. Supposons par exemple $\alpha_k \leqslant \beta_k$. Ainsi :

$$(uv^{-1}) \prod_{j\neq k} p_{i_j}^{\alpha_j} = p_{i_k}^{\beta_k - \alpha_k} \prod_{j\neq k} p_{i_j}^{\beta_j}$$

  Or pour tout $j \neq k$, $p_{i_j} \wedge p_{i_k} = 1$. Donc $\left(uv^{-1} \prod_{j\neq k} p_{i_j}^{\alpha_j}\right) \wedge p_{i_k} = 1$. Nécessairement, $\beta_k - \alpha_k = 0$.

◁ Ainsi, $u\prod_{j=1}^{d} p_{i_j}^{\alpha_j} = v\prod_{j=1}^{d} p_{i_j}^{\alpha_j}$ et donc $u = v$.

Existence : Soit $a \in A$.
Si a est irréductible, on a terminé. Sinon, a admet un diviseur irréductible a_1 par le Lemme 3.3.28. Ainsi, on a $i_1 \in I$, $p_{i_1} \mid a$. Ainsi $a = a_1 p_{i_1}$.

◁ Si a_1 est inversible, on a une décomposition en irréductibles.

◁ Sinon, il admet un diviseur irréductible p_{i_2}. On obtient ainsi une suite croissante d'idéaux, en un nombre fini d'étapes on obtient a_k inversible et ainsi une décomposition.

E) Anneaux euclidiens ⋆⋆

Définition 3.3.30: Anneau euclidien, stathme

Soit A un anneau commutatif intègre. On dit que A est *euclidien* s'il existe une application $\psi : A \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $a, b \in A\backslash\{0_A\}$, il existe $q, r \in A$ tels que

$$a = bq + r \text{ et } (r = 0 \text{ ou } \psi(r) < \psi(b))$$

L'application ψ est appelée *stathme euclidien.*

-

Proposition 3.3.31: Exemples

◁ $\mathbb{Z}$ est euclidien : le stathme est la valeur absolue.

◁ $\mathbb{K}[X]$ est euclidien, le stathme est le degré.

◁ $\mathbb{Z}$[i] est euclidien, quel est le stathme ?

Démonstration. Voir première année.

Théorème 3.3.32: Principalité d'un anneau euclidien

Soit $(A, +, .)$ un anneau euclidien. Alors A est principal.

Démonstration. C'est la même démonstration que $\mathbb{K}[X]$ euclidien, en remplaçant le stathme par ψ.

Cette propriété est riche de conséquences : tout anneau principal vérifie l'identité de Bézout, le lemme d'Euclide, on peut définir un PGCD, PPCM...

F) Idéaux maximaux ⋆⋆

Définition 3.3.33: Idéal maximal

Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I est *maximal* si $I \subsetneq A$ et si pour tout J idéal tel que $I \subsetneq J$, $J = A$.

C'est dire que (A/I) est un corps (en tant qu'anneau quotientn, notion largement hors-programme mais indéniablement intéressante).

Proposition 3.3.34: Caractérisation des idéaux maximaux

I est un idéal maximal *si et seulement si* pour tout $a \in A \backslash I$, il existe $b \in A$, $x \in I$, $ab = 1 + x$.

Démonstration. ◅ Soit $a \in A\backslash I$. On considère $J = I + (a)$. Par maximalité de I, comme $I \subsetneq J$, $J = A$. A fortiori $1 \in J$ d'où l'existence de $x \in I$ et $b \in A$ tels que $1 = x + ba$.

◅ Soit $I \subsetneq J \subseteq A$ où J est un idéal. On dispose de $a \in J\backslash I$, et de $b \in A$, $x \in I$ tels que $1 = ab - x \in J$ d'où $J = A$.

Corollaire 3.3.35

- ◅ Les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$ sont les $p\mathbb{Z}$ avec p premier.
- ◅ Les idéaux maximaux de $\mathbb{K}[X]$ sont les $(P) = P\mathbb{K}[X]$ avec P irréductible.

Démonstration. ◅ $\underline{\mathbb{Z}}$: $p\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \iff n \mid p$ donc $p\mathbb{Z}$ maximal *si et seulement si* ses seuls divisuers sont 1 et p.

◅ $\underline{\mathbb{K}[X]}$: même démonstration.

G) Idéaux premiers ⋆⋆

Définition 3.3.36: Idéal premier

I est un idéal premier si pour tout $(a, b) \in A^2$, si $ab \in I$ alors $a \in I$ ou $b \in I$

C'est dire que (A/I) est intègre.

Proposition 3.3.37

Si I est maximal, alors I est premier.

Démonstration. Avec les anneaux quotients c'est évident : un corps est toujours intègre.
Mais faisons la démonstration avec les outils de MP :
On suppose I maximal. Soit $(a,b) \in A^2$ tel que $ab \in I$. Supposons $a \notin I$. Par maximalité de I, on trouve $c \in A$ et $x \in I$, $ac = 1 + x$.
D'où $abc - xb = b \in I$.

IV) Corps

A) Caractéristique d'un corps ⋆⋆⋆

Soit $(\mathbb{K}, +, .)$ un corps.

A.1 Définition

Théorème 3.4.1: Caractéristique d'un corps

Considérons

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}, +, \times) & \longrightarrow & (\mathbb{K}, +, .) \\ k & \longmapsto & k.1_{\mathbb{K}} \end{array} \right.$$

qui est un morphisme d'anneaux.
$\mathrm{Ker}(\theta)$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ de la forme $p\mathbb{Z}$ avec $p \in \mathbb{N}$. p est appelé la *caractéristique du corps*, notée $\mathrm{car}(\mathbb{K})$.

- ◅ Si θ est injectif, $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$ et $\mathbb{Q}$ s'injecte dans $\mathbb{K}$.
- ◅ Sinon, $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = p \in \mathbb{P}$ et $\mathbb{F}_p$ s'injecte dans $\mathbb{K}$.s

Démonstration. On a $\mathrm{Ker}(\theta) = (p) = p\mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$.

- ◅ Supposons θ injectif, alors $p = 0$. θ est un morphisme d'anneaux injectif de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$.
  Soit $Z_0 = \theta(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ en tant qu'anneaux. Comme $\mathbb{K}$ est un corps, on peut poser $\mathbb{Q}_0$ le sous-corps engendré par Z_0, une copie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$.

$$\tilde{\theta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_0 \\ \frac{p}{q} & \longmapsto & \theta(p)\theta(q)^{-1} \end{array} \right.$$

  qui ne dépend pas des représentats choisis. C'est un isomorphisme de corps.
- ◅ Supposons que θ n'est pas injectif. Supposons $p = ab$, alors :

$$0_{\mathbb{K}} = \theta(p) = \theta(a)\theta(b)$$

  Par intégrité, $\theta(a) = 0$ ou $\theta(b) = 0$, *id est* $p \mid a$ ou $p \mid b$: impossible, donc $p \in \mathbb{P}$.
  On pose

$$\tilde{\theta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \overline{k}^p & \longmapsto & \theta(k) \end{array} \right.$$

  qui est injectif. Son image est une copie de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{K}$.

A.2 Cardinal d'un corps fini

Lemme 3.4.2: Un surcorps est un espace vectoriel sur le sous-corps

Si k est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{K}$ est un k-espace vectoriel.

Démonstration. On définit la loi de composition externe :

$$\star : \begin{cases} k \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\alpha, a) & \longmapsto & \alpha \times_{\mathbb{K}} a \end{cases}$$

et on vérifie toutes les propriétés.

Théorème 3.4.3

Tout corps fini a un cardinal de la forme p^d où $p = \text{car}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Nécessairement, sa caractéristique est strictement positive et première, notée p. De plus, $\mathbb{F}_p$ s'injecte dans $\mathbb{K}$. Ainsi on a $\tilde{\mathbb{F}_p} \subseteq \mathbb{K}$ une copie de $\mathbb{F}_p$. Alors, par le Lemme 3.4.2, $\mathbb{K}$ est un $\tilde{\mathbb{F}_p}$-espace vectoriel de dimension finie d.
Ainsi $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\tilde{\mathbb{F}_p}^d$, d'où $|\mathbb{K}| = |\tilde{\mathbb{F}_p}^d| = p^d$.

A.3 Morphisme de Frobenius

Proposition 3.4.4

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p.
Alors $\sigma : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x^p \end{cases}$ est un morphisme de corps.
En particulier, $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, (x+y)^p = x^p + y^p$.

C'est finalement le rêve de tout élève de troisième qui ne connaît pas ses identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Démonstration. En effet, si $k \in [\![1, p-1]\!]$, $k!\binom{p}{k} = \prod_{j=p-k+1}^{p} j$ est divisible par p.
Or $\forall j \in [\![1, p-1]\!], p \wedge j = 1$ d'où $p \wedge k! = 1$ et par le lemme de Gauss, $p \mid \binom{p}{k}$.
Par binôme de Newton, on conclut.

On remarque également que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, $\sigma = \text{id}$.

B) Carrés de $\mathbb{F}_p$ ⋆⋆⋆⋆

Lemme 3.4.5: Lemme du berger pour un morphisme de groupes

Soit $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes, avec G_1 fini. Alors :

$$|G_1| = |\mathrm{Ker}\psi||\mathrm{Im}\psi|$$

.

Démonstration. On écrit $G_1 = \bigsqcup_{y \in \mathrm{Im}(\psi)} \psi^{-1}(\{y\})$.
Pour $y = \psi(x_0) \in \mathrm{Im}(\psi)$ donné, $\psi^{-1}(\{y\}) = x_0\mathrm{Ker}(\psi)$. Donc $|\psi^{-1}(\{y\})| = |\mathrm{Ker}\psi|$ et on a le résultat.

Théorème 3.4.6

Pour tout $x \in \mathbb{F}_p^*$, x est un carré *si et seulement si* $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$ et

- $|\{x \in \mathbb{F}_p^*, \exists y \in \mathbb{F}_p^*, x = y^2\}| = \dfrac{p-1}{2}$
- $|\{x \in \mathbb{F}_p, \exists y \in \mathbb{F}_p, x = y^2\}| = \dfrac{p+1}{2}$

Démonstration. Considérons le morphisme de groupes :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p^* & \longrightarrow & \mathbb{F}_p^* \\ y & \longmapsto & y^2 \end{array} \right.$$

- Etude du noyau de φ : $y \in \mathrm{Ker}\,\varphi \iff y^2 = 1 \iff (y-1)(y+1) = 0$ et ainsi par intégrité cela équivaut à $y = \pm 1$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{-1, 1\}$.
- Cardinal de $\mathrm{Im}\,\varphi$: On a par le Lemme 3.4.5

$$|\mathrm{Im}\,\varphi| = \frac{|\mathbb{F}_p^*|}{\mathrm{Ker}\,\varphi} = \frac{p-1}{2}$$

Or, pour tout $x \in \mathrm{Im}\,\varphi$, x s'écrit $x = y^2$ avec $y \in \mathbb{F}_p^*$. Donc, par le théorème de Fermat :

$$x^{\frac{p-1}{2}} = y^{p-1} = \overline{1}$$

Ainsi $\underbrace{\mathrm{Im}\,\varphi}_{\text{cardinal } \frac{p-1}{2}} \subseteq \underbrace{\mathrm{Rac}\left(X^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)}_{\text{cardinal d'au plus } \frac{p-1}{2}}$ et on a donc égalité.

Corollaire 3.4.7

Soit $p \in \mathbb{P}$, $p \geqslant 3$.
(-1) est un carré dans $\mathbb{F}_p$ *si et seulement si* $p \equiv 1[4]$.

Démonstration. $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \iff \dfrac{p-1}{2} \equiv 0[2] \iff p \equiv 1[4]$.

C) Tout sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ est cyclique ⋆⋆⋆

Théorême 3.4.8

Soit G un sous-groupe fini de cardinal N de $\mathbb{K}^*$. Alors G est cyclique.

Démonstration. Deux démonstrations possibles ici, plus ou moins élémentaires

◁ Nécessite la Proposition 3.1.18 : Comme G est abélien,

$$d = \max_{g \in G} \operatorname{ord}(g) = \bigvee_{g \in G} \operatorname{ord}(g) \leqslant N$$

Ainsi pour tout $g \in G$, $g^d = 1_G = 1_{\mathbb{K}}$. Ainsi $X^d - 1$ a au moins N racines d'où $d \geqslant N$. Alors $d = N$ est G est cyclique.

◁ Sinon : Pour tout $x \in G$, $\operatorname{ord}(x) \in \{d, d \mid N\}$.

$$G = \bigsqcup_{d|N} \underbrace{\{x \in G, \operatorname{ord}(x) = d\}}_{=G_d}$$

On montre que $G_N \neq \varnothing$. Soit $d \mid N$.

— Cas 1 : $G_d = \varnothing$.
— Cas 2 : On prend $a \in G_d$. Alors $\langle a \rangle \subseteq \operatorname{Rac}(X^d - 1)$ qui a au plus d éléments. Ainsi :

$$\langle a \rangle = \operatorname{Rac}(X^d - 1)$$

Donc tout élément de G_d est dans $\langle a \rangle$. D'où $|G_d| = |\{x \in \langle a \rangle, \operatorname{ord}(x) = d\}| = \varphi(d)$.

Ainsi $|G_d| \in \{0, \varphi(d)\}$. Mais $\displaystyle\sum_{d|N} \varphi(d) = N = \sum_{d|N} |G_d|$ d'après la Proposition 3.3.8.
Nécessairement, pour tout $d \mid N$, $|G_d| = \varphi(d)$. En particulier, $|G_N| = \varphi(N) \geqslant 1$.

D) Extension algébrique de corps ⋆

Lemme 3.4.9

Soient $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ deux corps tel que $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit E un $\mathbb{L}$-espace vectoriel de dimension finie.
A fortiori, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})\dim_{\mathbb{L}}(E)$$

Démonstration. On prend $(e_1, ..., e_d)$ base de E comme $\mathbb{L}$-espace vectoriel.
On prend $(\omega_1, ..., \omega_d)$ base de $\mathbb{L}$ comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On montre aisément (liberté + caractère générateur) que $(\omega_i e_j)_{i,j}$ est une base de E comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

D.1 Elément algébrique sur un corps

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Proposition 3.4.10: Morphisme de spécialisation

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\theta_\alpha : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathcal{A}$.

Démonstration.
- ◁ $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et θ_α est l'unique application linéaire qui envoie (X^n) sur (α^n).
- ◁ On a bien $\theta_\alpha(1) = \theta_\alpha(X^0) = 1_{\mathcal{A}}$.
- ◁ Par linéarité, pour montrer $\theta_\alpha(PQ) = \theta_\alpha(P)\theta_\alpha(Q)$, il suffit de le montrer sur les monômes.
  Or $\theta_\alpha(X^p X^q) = \theta_\alpha(X^{p+q}) = \alpha^{p+q} = \alpha^p \alpha^q = \theta_\alpha(P)\theta_\alpha(Q)$.

On note $\mathbb{K}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathrm{Im}(\theta_\alpha)$. **Vif avertissement sur la nature des objets : $\alpha \in \mathcal{A}$, $P(\alpha)$ n'est pas une évaluation.**

Proposition 3.4.11

- ◁ Si θ_α est injectif, dans ce cas $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]$ et donc $\mathbb{K}[\alpha]$ est de dimension infinie.
- ◁ Si θ_α n'est pas injectif, on dit que α est *algébrique* sur $\mathbb{K}$ (il existe $P \neq 0$ tel que $P(\alpha) = 0_{\mathcal{A}}$).
  $\mathrm{Ker}(\theta_\alpha) = \{P \in \mathbb{K}[X], P(\alpha) = 0\}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de α est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\theta_\alpha) = P_\alpha \mathbb{K}[X]$ où P_α est l'unique polynôme unitaire qui engendre $\mathrm{Ker}(\theta_\alpha)$. Il est appelé *polynôme minimal* de α.

Démonstration. Ce sont des vérifications immédiates.

Supposons maintenant, pour la suite, $\alpha \in \mathcal{A}$ algébrique sur $\mathbb{K}$.

Théorème 3.4.12

Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, $\mathbb{K}[\alpha]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $d = \deg(P_\alpha)$ et de base $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$.

Démonstration. Par division euclidienne,

$$\mathbb{K}[X] = \mathrm{Ker}(\theta_\alpha) \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X] = P_\alpha \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

Comme $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ est un supplémentaire du noyau $\mathrm{Ker}(\theta_\alpha)$,$\theta_{\alpha|\mathbb{K}_{d-1}[X]}$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ dans son image $\mathbb{K}[\alpha]$. En particulier, il envoie la base canonique $(1, X, \dots, X^{d-1})$ vers $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$ base de $\mathbb{K}[\alpha]$.

Proposition 3.4.13

Supposons θ_α non-injectif. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{K}[\alpha]$ est intègre.
2. $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.
3. P_α est irréductible.

Démonstration.

- ◁ $\underline{(1) \Rightarrow (3)}$: On a $0 = P_\alpha(\alpha) = Q(\alpha)R(\alpha)$, si $P_\alpha = QR$ donc par intégrité $Q(\alpha) = 0$ ou $R(\alpha) = 0$ soit $P_\alpha \mid Q$ ou $P_\alpha \mid R$. Donc ils sont associés.
  Ainsi, P_α est irréductible.
- ◁ $\underline{(3) \Rightarrow (2)}$: Supposons que P_α est irréductible. Soit $Q(\alpha) \in \mathbb{K}[\alpha] \setminus \{0\}$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, donc P_α ne divise pas Q (sinon $Q(\alpha) = 0$).
  Donc $P_\alpha \wedge Q = 1$. D'après le théorème de Bézout, on dispose de $U, V \in \mathbb{K}[X]^2$, $UP_\alpha + VQ = 1$ d'où $V(\alpha)Q(\alpha) = 1$. Ainsi $Q(\alpha)$ est inversible.
  De plus $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}$, donc c'est un corps.
- ◁ $\underline{(2) \Rightarrow (1)}$: évident.

D.2 Cas où l'algèbre est un surcorps de $\mathbb{K}$.

Soient $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ deux corps. A fortiori, $\mathbb{L}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Le point précédent s'applique donc.

Rappel 3.4.14: Caractérisation par la dimension

$\alpha \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ *si et seulement si* $\mathbb{K}[\alpha]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. ◁ Si α n'est pas algébrique sur $\mathbb{K}$, θ_α est injectif donc $\mathbb{K}[\alpha] \simeq \mathbb{K}[X]$. Alors $\mathbb{K}[\alpha]$ est de dimension infinie.

◁ Si α est algébrique sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[\alpha]$ est de dimension finie égale à $\deg(P_\alpha)$.

On montre alors aisément que tout élément $x \in \mathbb{K}[\alpha]$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si α l'est. En effet $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[x] \subseteq \mathbb{K}[\alpha]$ donc de dimension finie.

Théorème 3.4.15: Structure de corps

P_α est irréductible sur $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.

Attention, cela ne marche que lorsque $\mathcal{A} = \mathbb{L}$ est un **surcorps** de $\mathbb{K}$.

Démonstration. $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{L}$ qui est un corps donc intègre. Ainsi, $\mathbb{K}[\alpha]$ est intègre. D'après les équivalences de la Proposition 3.4.13, on obtient le résultat.

Exemple 3.4.16

- ◁ $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ et } \alpha = \mathrm{i}}$: i est algébrique sur $\mathbb{R}$ de polynôme minimal $X^2 + 1$ et $\mathbb{R}[\mathrm{i}] = \mathbb{C}$, de dimension 2 sur R.
- ◁ $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{Q} \text{ et } \alpha = \mathrm{j}}$: j est algébrique sur $\mathbb{Q}$, car $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ annule j. De plus il est de degré 2 sans racine dans $\mathbb{Q}$ donc irréductible : c'est bien le polynôme minimal. Ainsi $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\mathrm{j}]) = 2$ de base $(1, \mathrm{j})$.
- ◁ $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{Q} \text{ et } \alpha = \sqrt{2}}$: $P_{\sqrt{2}} = X^2 - 2$

Lemme 3.4.17: Tour d'extensions

Si α et β sont algébriques sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[\alpha][\beta]$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$. On a :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha][\beta]) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha])\dim_{\mathbb{K}[\alpha]}(\mathbb{K}[\alpha][\beta])$$

Démonstration. Posons $k = \mathbb{K}[\alpha]$ qui est un corps.
$P_\beta \in \mathbb{K}[X]$ annule β mais $P_\beta \in k[X]$. Donc β est algébrique sur k. Ainsi, $\dim_k(k[\beta]) < +\infty$. Or, $\mathbb{K} \subseteq k = \mathbb{K}[\alpha] \subseteq \mathbb{K}[\alpha][\beta]$. Ainsi, on a le résultat souhaité, en utilisant le Lemme 3.4.9 sur la multiplicativité des dimensions.

Définition 3.4.18: Clôture algébrique

On définit la *clôture algébrique* d'un corps $\mathbb{K}$ comme le plus petit surcorps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ tel que tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ soit scindé sur $\mathbb{L}$.
Un corps est *algébriquement clos* lorsque tout polynôme à coefficients dans ce corps est scindé. Autrement dit, tout $\alpha \in \mathbb{K}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$.

$\mathbb{C}$ est donc un corps algébriquement clos d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Corollaire 3.4.19

$k = \{z \in \mathbb{C}, z \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q}\}$ est un corps algébriquement clos.

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in k$.

- ◁ Stabilité par addition et multiplication : Par le Lemme 3.4.17, $\mathbb{Q}[\alpha][\beta]$ est de dimension finie sur k.
  Or $\begin{cases} \alpha+\beta \in \mathbb{Q}[\alpha][\beta] \\ \alpha\beta \in \mathbb{Q}[\alpha][\beta] \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mathbb{Q}[\alpha+\beta] \subseteq \mathbb{Q}[\alpha][\beta] \\ \mathbb{Q}[\alpha\beta] \subseteq \mathbb{Q}[\alpha][\beta] \end{cases}$. Ainsi $\mathbb{Q}[\alpha+\beta]$ et $\mathbb{Q}[\alpha\beta]$ sont de dimenion finie sur k. Donc $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, donc appartiennent à k.
- ◁ Stabilité par inverse : Soit $\alpha \in k \setminus \{0\}$. Soit P_α sont polynôme minimal, et notons d son degré. On considère $X^d P_\alpha\left(\frac{1}{X}\right) \in \mathbb{Q}[X]$: il annule $\frac{1}{\alpha}$ donc $\frac{1}{\alpha} \in k$.
  Ainsi, k est un corps.
- ◁ k est algébriquement clos : Soit $P \in k[X]$. Notons

$$P = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j X^j \in \mathbb{Q}[\alpha_0, \dots, \alpha_n][X]$$

  où $\alpha_j \in k$. Soit $\beta \in \mathbb{C}$ racine de P. β est algébrique sur $\mathbb{Q}[\alpha_0, \dots, \alpha_n] = \mathbb{Q}[\alpha_0] \dots [\alpha_n]$, qui par le Lemme 3.4.9 (et une récurrence immédiate), est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. Or $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\alpha_0, \dots, \alpha_n] \subseteq \mathbb{Q}[\alpha_0, \dots, \alpha_n][\beta]$ tous de dimension finie. A fortiori, $\mathbb{Q}[\beta]$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. Donc $\beta \in k$.

D.3 Automorphismes du corps $\mathbb{Q}[\alpha]$

Proposition 3.4.20

Soit α algébrique sur $\mathbb{Q}$ et φ un automorphisme du corps $\mathbb{Q}[\alpha]$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \varphi(x) = x$$

Démonstration. ◁ Par récurrence sur $\mathbb{N}$, comme $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(n+1) = \varphi(n)+1 = n+1$.

◁ On transfère la propriété à $\mathbb{Z}$.

◁ Puis à $\mathbb{Q}$ en remarquant que pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{N}^*$,

$$p = \varphi(p) = \varphi(q \times \frac{p}{q}) = q\varphi(\frac{p}{q})$$

Proposition 3.4.21

Si P est le polynôme minimal de α, $\varphi(\alpha)$ est racine de P.

Démonstration. Appliquer φ et utiliser la propriété de morphisme d'anneaux.

Corollaire 3.4.22: Dénombrement des automorphismes de $\mathbb{Q}[\alpha]$

$$|\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[\alpha])| \leqslant \deg(P)$$

Démonstration. Immédiate.

Cela permet parfois de trouver *tous* les automorphismes d'un $\mathbb{Q}[\alpha]$. Par exemple, considérons $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[\mathrm{j}])$. On sait qu'il y a au plus 2 automorphismes de $\mathbb{Q}[\mathrm{j}]$.
Or, l'identité et la conjugaison conviennent : on les a tous.

V) Polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$. On notera $\deg(P) \in \mathbb{N}$ le degré de P et $[P] \in \mathbb{K}$ le coefficient dominant de P

A) Polynômes de Tcheybychev ⋆⋆⋆⋆

Théorème 3.5.1

◁ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

◁ On a la formule par récurrence suivante : $\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \end{cases}$.

◁ $\begin{cases} \deg(T_n) = n \\ [T_0] = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, [T_n] = 2^{n-1} \end{cases}$.

◁ Le polynôme T_n admet n racines distinctes dans $[-1\,,1]$.

Démonstration. A savoir faire très rapidement.

◅ Existence : Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(nt) &= \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}nt}) = \mathrm{Re}\left((\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k \sin^k(t)\cos^{n-k}(t)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k(\sin^2 t)^k(\cos t)^{n-2k}\\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k(1-(\cos t)^2)^k(\cos t)^{n-2k}\end{aligned}$$

Ainsi en posant $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k(1-X^2)^k X^{n-2k}$, on a $\cos(nt) = T_n(\cos t)$.

◅ Unicité : Si P_n et T_n conviennent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(P_n - T_n)(\cos t) = 0$. Cela fournit une infinité de racines du polynôme $P_n - T_n$, qui ne peut donc qu'être nul. Alors $P_n = T_n$.

◅ Formule de récurrence : Soit $n \geqslant 1$.

$$\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) = 2\cos(nt)\cos(t)$$

Donc pour $t \in \mathbb{R}$,

$$T_{n+1}(\cos t) = 2T_n(\cos t)\cos t - T_{n-1}(\cos t)$$

Ainsi $T_{n+1} - 2XT_n + T_{n-1}$ s'annule sur $[-1\,,1]$ et est donc nul. Ainsi $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

◅ Degré, coefficient dominant : par récurrence rapide.

◅ Racines : Soit $x \in [-1\,,1]$, et $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos t$.

$$\begin{aligned}T_n(x) = 0 &\iff T_n(\cos t) = 0\\ &\iff \cos(nt) = 0\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, nt = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ &\iff \exists k \in [\![0\,, n-1]\!]\,, t = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

Ainsi pour $k \in [\![0\,, n-1]\!]$, $x_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ est racine de T_n.
Par décroissance stricte de cos sur $[0\,,\pi]$,

$$-1 < x_{n-1} < \cdots < x_0 < 1$$

T_n a donc n racines distincts dans $[-1\,,1]$, on les a toutes car $\deg(T_n) = n$.

B) Irréductibilité, racines et surjectivité

B.1 Racines et irréductibilité ⋆⋆⋆⋆

Attention, il ne faut pas se fier à l'intution habituelle que l'on a sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut avoir $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ par exemple.

Remarque 3.5.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, avec $\deg(P) \geqslant 2$. Alors P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$. Ceci est bien connu : un polynôme irréductible n'a pas de racine (s'il est de degré $\geqslant 2$) dans le corps considéré.

Mais attention ! La réciproque n'est vraie que pour les polynômes de degré 2 ou 3. Voici le contre-exemple : $P = (X^2 + X + 1)^2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas irréductible.

Démonstration. Si P est de degré 2 ou 3, $P = Q_1 Q_2$ avec $\deg Q_1 + \deg Q_2 \in \{2, 3\}$. Donc l'un des polynômes est de degré 1 et P a un racine.

Alors il est facile de trouver $P \in \mathbb{F}_2[X]$ de degré 2 ou 3 qui est irréductible, il suffit qu'il n'ait pas de racine : $P = X^2 + X + 1$ ou $P = X^3 + X^2 + 1$.

B.2 PGCD et corps ⋆⋆⋆

Proposition 3.5.3: Indépendance du PGCD / corps

Soient deux corps $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{L}[X]$. Alors :

$$P \wedge_{\mathbb{K}[X]} Q = P \wedge_{\mathbb{L}[X]} Q$$

Démonstration. On obtient le PGCD par l'algorithme d'Euclide, en réalisant des divisions euclidiennes successives qui ne dépendent pas du corps.

Corollaire 3.5.4

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Supposons P scindé sur un surcorps $\mathbb{L}$. Alors toutes ses racines sont simples.

Démonstration. Comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, $0 < \deg(P') \leqslant \deg(P) - 1$. Donc par irréductibilité de P, $P \wedge P' = 1$ dans $\mathbb{K}[X]$ donc dans $\mathbb{L}[X]$. Ainsi P et P' n'ont pas de racine commune et toutes les racines sont simples.

B.3 Surjectivité d'un polynôme ⋆⋆

Proposition 3.5.5

1. $\{P \in \mathbb{C}[X], P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\} = \mathbb{C}[X]$
2. $\{P \in \mathbb{C}[X], P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\} = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg P \text{ impair}\}$
3. $\{P \in \mathbb{C}[X], P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}_1[X]$

Démonstration. 1. C'est une conséquence directe du théorème de d'Alembert-Gauss.

2. Les polynômes de degré impair sont surjectifs d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceux de degré pair admettent un extréma global.

3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P réalise une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$. Il est évident qu'un polynôme de $\mathbb{Q}_1[X]$ réalise une telle surjection, nous nous contenterons donc de montrer l'inclusion directe.

   ◁ Montrons tout d'abord que $P \in \mathbb{Q}[X]$.
   On utilise les polynômes de Lagrange : en notant $n = \deg P$, on prend $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ 2-à-2 distincts.
   Posons $\tilde{P} = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) \prod_{k \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}} \frac{X - a_k}{a_j - a_k} \in \mathbb{Q}_n[X]$.
   Alors, $P - \tilde{P}$ est un polynôme de degré $\leqslant n$ qui a $n+1$ racines (les $a_0, \dots a_n$). Ainsi $P = \tilde{P} \in \mathbb{Q}[X]$.

   ◁ Montrons que $P = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ est de degré 1. Quitte à multiplier par le PGCD des coefficients de P, on considère que $P \in \mathbb{Z}[X]$.
   On étudie l'image réciproque par P des $\left(\frac{1}{m}\right)_{m \in \mathbb{P}}$.
   Soit $m \in \mathbb{P}$; par surjectivité, soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tels que $P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{m}$.
   Ainsi $m \sum_{k=0}^{n} b_k p^k q^{n-k} = q^n$ d'où $m \mid q$, et ainsi $q = mq_0$ avec $q_0 \wedge p = 1$ et $m \wedge p = 1$.
   Cela se réécrit

$$mb_n p^n + q \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} b_k p^k q^{n-1-k}}_{=\Delta} = m^n q_0^n$$

   et finalement :

$$b_n p^n + mq_0 \Delta = m^{n-1} q_0^n$$

   Par l'absurde, si $n \geqslant 2$, $m \mid b_n p^n$ et par le lemme de Gauss, $m \mid b_n$.
   Il suffit donc de choisir $m \in \mathbb{P}$ qui ne soit pas un diviseur de b_n, dans ce cas $\frac{1}{m}$ n'a pas d'antécédent. Donc $n = 1$ et on conclut.

C) Irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$ ⋆⋆

C.1 Contenu

Définition 3.5.6: Contenu d'un polynôme et primitivité

Soit $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_n \neq 0$. On définit le *contenu* de P par

$$\mathrm{cont}(P) = \bigwedge_{j=0}^{n} a_j$$

On dit que P est primitif si $\text{cont}(P) = 1$.

Lemme 3.5.7

Si P et Q sont primitifs, alors PQ est primitif.

Démonstration. Proposons deux démonstrations.

◁ Par passage modulo p (à la frontière du programme) : Posons

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^{n} m_k X^k & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} \overline{m_k} X^k \end{array} \right.$$

On vérifie que c'est un morphisme d'anneaux. Ainsi :

$$\pi(PQ) = \underbrace{\pi(P)}_{\neq 0}\,\underbrace{\pi(Q)}_{\neq 0}$$

car $\text{cont}(P) = \text{cont}(Q) = 1$.
Comme $\mathbb{F}_p$ est un corps, $\mathbb{F}_p[X]$ est intègre, donc $\pi(PQ) \neq 0$ et p ne divise pas $\text{cont}(PQ)$.

◁ De façon élémentaire : $PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{\substack{(i,j) \\ i+j=k}} a_i b_j$.

On peut donc définir, comme $\text{cont}(P) = 1$ et $\text{cont}(Q) = 1$,

$$i_0 = \min\{i, p \nmid a_i\} \text{ et } j_0 = \min\{j, p \nmid b_j\}$$

Alors

$$c_{i_0+j_0} = \underbrace{a_{i_0} b_{j_0}}_{\text{premier avec } p} + \sum_{k=0}^{i_0-1} \underbrace{a_k}_{\text{divisible par } p} b_{i_0+j_0-k} + \sum_{k=0}^{j_0-1} \underbrace{b_k}_{\text{divisible par } p} b_{i_0+j_0-k}$$

D'où $c_{i_0+j_0} \equiv a_{i_0} b_{j_0} [p]$.

Théorème 3.5.8

Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\})^2$,

$$\text{cont}(PQ) = \text{cont}(P)\text{cont}(Q)$$

Démonstration. Posons $P_0 = \dfrac{P}{\text{cont}(P)}$ et $Q_0 = \dfrac{Q}{\text{cont}(Q)}$ qui sont primitifs. Or on a :

$$\text{cont}(aP) = |a|\text{cont}(P)$$

Donc $\text{cont}(P_0 Q_0) = 1$. Or $PQ = \underbrace{\text{cont}(P)\text{cont}(Q)}_{\in \mathbb{Z}^*} P_0 Q_0$ donc $\text{cont}(PQ) = \text{cont}(P)\text{cont}(Q)$.

C.2 Critère d'Eisenstein

Théorème 3.5.9

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ avec $a_n \neq 0$.

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{P}$ tel que : $\begin{cases} \forall j \in [\![0, n-1]\!], p \mid a_j \\ p \nmid a_n \\ p^2 \nmid a_0 \end{cases}$

Alors les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{Z}[X]$ sont de degré 0 ou n.
P est donc irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Démonstration. On suppose $P = QR$ avec $(Q, R) \in (\mathbb{Z}[X])^2$. Soit $p \in \mathbb{P}$ vérifiant l'hypothèse. Alors, en ayant

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^{n} m_k X^k & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} \overline{m_k} X^k \end{cases}$$

on a

$$\overline{a_n} X^n = \pi(P) = \pi(Q)\pi(R)$$

Par unicité de la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{F}_p[X]$ (Théorème 3.3.29), $\pi(Q)$ et $\pi(R)$ sont de la forme $\overline{b_k} X^k$ et $\overline{c_l} X^l$ avec $k + l = n$.
Par l'absurde, si $k, l \geqslant 1$, alors $\overline{b_o} = \overline{c_0} = 0$ *id est* $p \mid b_0$ et $p \mid c_0$. Alors $p^2 \mid a_0$: c'est impossible.

D) Polynômes cyclotomiques ⋆⋆

On rappelle que $\mathbb{V}_d$ est l'ensemble des racines d-ièmes primitives de l'unité.

Définition 3.5.10

Pour $d \in \mathbb{N}^*$ on pose le *d-ième polynôme cyclotomique* :

$$\Phi_d = \prod_{\omega \in \mathbb{V}_d} (X - \omega)$$

Cela amène $\deg \Phi_d = \varphi(d)$.

Proposition 3.5.11

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$$

Démonstration. Comme $\mathbb{U}_n = \bigcup_{d|n} \mathbb{V}_d$, on a :

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{d|n} \left(\prod_{\omega \in \mathbb{V}_d} (X - \omega) \right) = \prod_{d|n} \Phi_d$$

Proposition 3.5.12

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_d \in \mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. On procède par récurrence forte sur d.

- ◁ Pour $d = 1$, $\Phi_1 = X - 1$.
- ◁ Soit $n \geqslant 2$. Supposons pour tout $d < n$, $\Phi_d \in \mathbb{Z}[X]$.

$$\underbrace{X^n - 1}_{=A} = \Phi_n \prod_{\substack{d|n \\ d<n}} \Phi_d = \Phi_n B$$

Comme A et B sont dans $\mathbb{Z}[X]$ et que B est unitaire, par division euclidienne de A par B dans $\mathbb{Q}[X]$, on a $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Proposition 3.5.13

Pour $p \in \mathbb{P}$, $\Phi_p = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$.

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{U}_p$, $\mathrm{ord}(z) \in \{1, p\}$ d'où $\mathbb{V}_p = \mathbb{U}_p \backslash \{1\}$.
$X^p - 1 = (X - 1)\Phi_p$ d'où $\Phi_p = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$.

Exemple 3.5.14: Quelques Φ_n

- ◁ $\Phi_1 = X - 1$
- ◁ $\Phi_2 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i}) = X^2 + 1$
- ◁ $\Phi_3 = X^2 + X + 1$
- ◁ $\Phi_6 = (X + \mathrm{j})(X + \bar{\mathrm{j}}) = X^2 - X + 1$

◁ Déterminons Φ_8.

$$\begin{aligned}\Phi_8 &= \left(X - \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{8}\right)\right)\left(X - \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}\right)\right)\\ &\quad\times\left(X - \exp\left(\frac{3\mathrm{i}\pi}{8}\right)\right)\left(X - \exp\left(-\frac{3\mathrm{i}\pi}{8}\right)\right)\\ &= \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 1\right)\\ &= \left(X^2 - 2X\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + 1\right)\left(X^2 - 2X\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + 1\right)\\ &= X^4 + 1\end{aligned}$$

Proposition 3.5.15: Irréductibilité

Pour $p \in \mathbb{P}$, Φ_p est irréductible.

Démonstration. On montre que $\Phi_p(X+1)$ est irréductible. En effet si $\Phi_p = AB$, $\Phi_p(X+1) = A(X+1)B(X+1)$. C'est un corollaire du **critère d'Eisenstein**, Théorème 3.5.9.

◁ Rédaction 1 : On a $\Phi_p = \dfrac{X^p - 1}{X - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} X^k$. Soit $P = \Phi_p(X+1)$.

Par binôme, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X^j = \sum_{j=0}^{p-1}\underbrace{\sum_{k=j}^{p-1}\binom{k}{j}}_{=c_j}X^j$.

— $c_0 = p$ est divisible par p mais pas par p^2.

— $c_{p-1} = 1$ n'est pas divisible par p.

— Pour $j \in [\![1, p-2]\!]$, $c_j = \displaystyle\sum_{k=j}^{p-1}\binom{k}{j} = \binom{p}{j+1}$ divisible par p.

◁ Rédaction 2 : $X^p - 1 = (X-1)\Phi_p$ d'où $(X+1)^p - 1 = X\Phi_p(X+1)$.
Alors $X^p + 1 - 1 = X\pi(\Phi_p(X+1))$ et $\pi(\Phi_p(X+1)) = X^{p-1}$.

VI) Fractions rationnelles

A) $\frac{P'}{P}$ ⋆⋆⋆⋆

Proposition 3.6.1

Supposons $P = \lambda \prod_{j=1}^{d} (X - \alpha_j)^{m_j}$, avec les $(\alpha_j)_{j \in [\![1,d]\!]}$ deux-à-deux distincts. Alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{c} \frac{m_j}{X - \alpha_j}$$

A.1 Premiers rappels de convexité

Ces rappels seront complétés lors du chapitre de Topologie.

Définition 3.6.2: Convexité

$A \subseteq E$ est convexe si pour $(a, b) \in A^2$,

$$[a\,,b] = \{(1-t)a + tb, t \in [0\,,1]\} \subseteq A$$

Théorème 3.6.3

A est convexe *si et seulement si* il est stable par barycentre à coefficients positifs.

Démonstration. Par récurrence sur n, la longueur de la combinaison linéaire barycentrique.
$\underline{n = 2}$: c'est la définition.
$\underline{n \to n+1}$: Supposons la propriété vraie pour n points.
Soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in A^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \neq 0$.

$$\text{Bar}\{(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)\} = \text{Bar}\left\{\left(b, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\right), (a_{n+1}, \lambda_{n+1})\right\} \text{ par associativité,}$$

où $b = \text{Bar}\{(a_i, b_i), 1 \leqslant i \leqslant n\} \in A$ par hypothèse de récurrence.
A étant convexe, $c \in A$.

Lemme 3.6.4

Si les $(A_i)_{i \in I}$ sont convexes, $\bigcap_{i \in I} A_i$ est convexe.

Théorème 3.6.5

Pour $B \subseteq E$, il existe une plus petite partie convexe contenant B. C'est l'intersection de toutes les parties convexes contenant B. On l'appelle *enveloppe convexe*, notée $\mathrm{Conv}(B)$.

Théorème 3.6.6

$\mathrm{Conv}(B)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de B.

A.2 Théorème de localisation de Gauss-Lucas

Théorème 3.6.7

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de P.

Démonstration. On écrit $P = \lambda \prod_{j=1}^{d} (X - \alpha_j)^{\beta_j}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- ◅ Soit $z \in \{\alpha_j, j \in [\![1\,,d]\!]\} = Z(P)$. A fortiori, $z \in \mathrm{Conv}(Z(P))$.
- ◅ Soit $z \notin Z(P)$, on écrit

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{d} \frac{m_j}{z - \alpha_j} = \sum_{j=1}^{d} \frac{m_j(\bar{z} - \bar{\alpha_j})}{|z - \alpha_j|^2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{m_j(z\alpha_j)}{|z - \alpha_j|^2} = 0$. Ainsi $z = \mathrm{Bar}\left(\left(\alpha_j, \frac{m_j}{|z - \alpha_j|^2}\right), j \in [\![1\,,d]\!]\right)$ c'est-à-dire :

$$z = \frac{1}{\sum_{j=1}^{d} \frac{m_j}{|z-\alpha_j|^2}} \sum_{j=1}^{d} \frac{m_j}{|z - \alpha_j|^2} \alpha_j$$

B) Pôle simple ⋆⋆⋆⋆

Proposition 3.6.8

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, avec $\deg F < 0$ (quitte à faire la division euclidienne).
$F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$. Soit a un pôle simple de F, et $Q = (X - a)R, R(a) \neq 0$
Dans la décomposition en éléments simples de F, la partie polaire associée à a est

$$\frac{\lambda}{X - a} \text{ avec } \lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)} = \frac{P(a)}{R(a)}$$

Démonstration. $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{\lambda}{X-a} + F_0$. $F_0 \in \mathbb{K}(X)$ n'a plus a comme pôle.
On multiplie par $(X-a)$:

$$\frac{P}{R} = \lambda + (X-a)F_0 \in \mathbb{K}(X)$$

On évalue en a : $\dfrac{P(a)}{R(a)} = \lambda$.
Or $Q' = (X-a)R' + R$ d'où $Q'(a) = R(a)$.

Chapitre 4

Rappels d'algèbre linéaire

I) Matrices et changement de base

A) Matrice de passage ⋆⋆⋆⋆

Voici des formules très souvent erronées dans les copies, alors qu'elles sont essentielles lors d'un exercice d'algèbre linéaire.

Définition 4.1.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit e une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une autre base de E. On définit *la matrice de passage de e à f* :

$$P_e^f = \mathrm{Mat}_e(f_1, \dots, f_n) = \mathrm{Mat}_{f,e}(\mathrm{id})$$

Une telle matrice est inversible : $(P_e^f)^{-1} = P_f^e$.

Théorème 4.1.2

Soit $P = P_e^f$ matrice de passage de e à f.
Pour tout $x \in E$, si on note $X_e = \mathrm{Mat}_e(x)$ et $X_f = \mathrm{Mat}_f(x)$, on a :

$$X_e = PX_f = P_e^f X_f$$

$$X_f = P^{-1}X_f = P_f^e X_e$$

B) Formule de changement de base et exemples essentiels ⋆⋆⋆⋆

Théorème 4.1.3: Formule de changement de base

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et e_1, e_2 deux bases de E ; f_1, f_2 deux bases de F. Alors, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$\mathrm{Mat}_{e_1,f_1}(u) = P_{f_1}^{f_2}\,\mathrm{Mat}_{e_2,f_2}(u)(P_{e_1}^{e_2})^{-1}$$

Corollaire 4.1.4

Si u est un endomorphisme,

$$\mathrm{Mat}_{e_1}(u) = P_{e_1}^{e_2}\,\mathrm{Mat}_{e_2}(u)(P_{e_1}^{e_2})^{-1}$$

Traitons de façon complète un cas simple pour ne pas faire d'erreur.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, et soit f l'endomorphisme de E ayant pour matrice dans la base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_2$ et $e'_3 = -\frac{1}{3}e_2 + e_3$. Soit $\mathfrak{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

Cacluler $A' = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}(f)$, puis si $[x]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculer $[x]_{\mathfrak{B}'}$.

◁ On a $A' = P^{-1}AP$ où $P = P_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient P^{-1} en explicitant e_1, e_2 et e_3 en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3.

$$\begin{cases} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_2 \\ e'_3 &= -\frac{1}{3}e_2 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 &= e'_1 \\ e_2 &= e'_2 \\ e_3 &= \frac{1}{3}e'_2 + e'_3 \end{cases}$$

Ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◁

$$[x]_{\mathfrak{B}'} = P_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}[x]_{\mathfrak{B}} = P^{-1}[x]_{\mathfrak{B}}$$

soit

$$[x]_{\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

C) Lemme de factorisation ⋆⋆⋆

Rappel 4.1.5: Comportement du noyau et de l'image lors d'une composition

Pour tous u, v deux endomorphismes quelconques,

$$\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(v \circ u)$$

$$\mathrm{Im}(v \circ u) \subseteq \mathrm{Im}(v)$$

Proposition 4.1.6: Première factorisation

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $w \in \mathcal{L}(E,G)$. Alors :

$$\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(w) \iff \exists v \in \mathcal{L}(F,G), w = v \circ u$$

Démonstration. ◅ L'implication réciproque est connue.

◅ Idée : Si u était un isomorphisme, on poserait $v = w \circ u^{-1}$. On va donc restreindre u.
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. On sait que :

$$\tilde{u} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.
On écrit $F = \mathrm{Im}(u) \oplus H_1$. On considère $v \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_{|\mathrm{Im}(u)} & = w \circ \tilde{u}^{-1} \\ v_{|H_1} & = 0_{\mathcal{L}(H_1,G)} \end{array} \right.$$

Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u)$, $v \circ u(x) = v(0_G) = w(x)$ car $\mathrm{Ker}\, u \subseteq \mathrm{Ker}\, w$.
Pour tout $x \in H$, $u(x) = \tilde{u}(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $v \circ u(x) = w \circ \tilde{u}^{-1} \circ u(x) = w(x)$.
Finalement $v \circ u$ et w coïncident sur H et sur $\mathrm{Ker}\, u$ donc sur E.

Proposition 4.1.7: Deuxième factorisation

Soient $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $w \in \mathcal{L}(E,G)$. Alors :

$$\mathrm{Im}(w) \subseteq \mathrm{Im}(v) \iff \exists u \in \mathcal{L}(E,F), w = v \circ u$$

Démonstration. On écrit $F = H \oplus \mathrm{Ker}(v)$.

$$\tilde{v} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathrm{Im}(v) \\ x & \longmapsto & v(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.
Pour tout $x \in E$, $w(x) \in \mathrm{Im}(w) \subseteq \mathrm{Im}(v)$. Donc $\tilde{v}^{-1}(w(x))$ est bien défini.
On pose donc :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \tilde{v}^{-1}(w(x)) \end{array} \right.$$

et on vérifie qu'il convient.

II) Rang d'une matrice

A) Définition et calcul ⋆⋆⋆⋆

Rappel 4.2.1: Rang d'une AL

Le rang d'une application linéaire f de E dans F est la dimension de son image.

Théorème 4.2.2: Théorème du rang

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

- ◁ Notons H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Alors $f_{|H} : H \longrightarrow F$ est un isomorphisme.
- ◁ Si de plus $\dim E < +\infty$,

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E$$

Rappel 4.2.3: Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est :

- ◁ le rang de l'application linéaire qu'elle représente ;
- ◁ le rang de la famille de ses vecteurs colonnes ;
- ◁ le rang de la famille de ses vecteurs lignes ;
- ◁ le plus grand ordre des matrices carrés inversibles extraites de A ;
- ◁ le nombre maximal de vecteurs lignes ou colonnes linéairement indépendants.

Méthode 4.2.4: Calcul du rang

- ◁ Expliciter les vecteurs linéairement indépendants.
- ◁ Calculer la forme échelonnée de la matrice (voir la section sur le pivot de Gauss)
- ◁ Changer de base.

B) Matrices J_r ⋆⋆⋆⋆

Théorème 4.2.5

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r *si et seulement si* elle est équivalente à

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Attention, en général A n'est pas semblable à J_r.

C) Propriétés ⋆⋆⋆

Rappel 4.2.6: Propriétés de base

Pour toutes matrices A et B,
- ◅ $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$
- ◅ $\operatorname{rg}(A+B) \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$
- ◅ $\operatorname{rg}(A^\top) = \operatorname{rg}(A)$

Proposition 4.2.7: Rang d'une composée

Pour tous endomorphismes u et v,

$$\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} v - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v)$$

Démonstration. Appliquer le théorème du rang à $u_{|\operatorname{Im} v}$.

Proposition 4.2.8: Inégalité de Frobenius

Pour $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\operatorname{rg}(AB) + \operatorname{rg}(BC) \leqslant \operatorname{rg}(ABC) + \operatorname{rg}(B)$$

Démonstration. Notons a, b, c les AL canoniquement associées. Appliquer le théorème du rang à $a_{|\operatorname{Im}(b\circ c)}$ et à $a_{|\operatorname{Im}(b)}$.

Proposition 4.2.9: Rang dans une extension de corps

Si $\mathbb{L}$ est un surcorps de $\mathbb{K}$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{L})$, on a :

$$\operatorname{rg}_{\mathbb{K}}(A) = \operatorname{rg}_{\mathbb{L}}(A)$$

Démonstration. Le rang est la taille de la plus grande matrice extraite inversible.

III) Pivot de Gauss

A) Rappel de l'algorithme ⋆⋆⋆⋆

Méthode 4.3.1: Elimination de Gauss-Jordan

On n'agit que sur les lignes pour inverser une matrice ou résoudre un système linéaire.

1. On cherche la première colonne non-nulle de la matrice A.
2. Sur cette colonne, on effectue un choix de pivot : on a intérêt à choisir un pivot donnant le moins de calculs possible, si on effectue les calculs à la main. Il y a trois critères pour cela :
   - ◅ Le pivot lui-même doit être facile à inverser. L'idéal est un pivot égal à 1.
   - ◅ Les autres coefficients de la ligne du pivot doivent être "simples", de préférence des entiers.
   - ◅ Plus il y a de zéros sur la ligne contenant le pivot, moins il y aura de calculs !
3. On fait un échange de lignes pour ramener le pivot sur la première ligne.
4. On annule tous les coefficients situés sous le pivot à l'aide d'opérations élémentaires $L_i \longleftarrow \alpha L_i + \beta L_1$, $\alpha \neq 0$.
5. On recommence récursivement en considérant la sous-matrice située strictement en-dessous à droite du pivot.

Voici une description algorithmique en pseudo-code :

Entrée : A une matrice
Sortie : A' matrice échelonnée équivalente par lignes à A

Initialiser l'indice j de colonne à 1;
Initialiser l'indice i de ligne à 1;
tant que *les indices i et j ne font pas sortir de la matrice A* **faire**
  si *le bas de la colonne j (en-dessous de la ligne i au sens large) est nul* **alors**
    Passer à la colonne suivante ($j \leftarrow j + 1$)
  sinon
    Placer un élément non nul en position (i, j) par une opération $L_i \leftrightarrow L_k$;
    pour $k \leftarrow i + 1$ **à** *dernière ligne* **faire**
      $L_k \leftarrow L_k + \lambda L_i$, où $\lambda = -\dfrac{L_k[j]}{L_i[j]}$
    fin pour
    Passer à la ligne suivante ($i \leftarrow i + 1$);
    Passer à la colonne suivante ($j \leftarrow j + 1$)
  fin si
fin tant que
renvoyer A

En appliquant cet algorithme à une matrice carrée, on obtient une matrice triangulaire équivalente (par lignes) à la première.

B) Opérations élémentaires

B.1 Définition et propriétés ⋆⋆⋆⋆

Proposition 4.3.2: Matrices élémentaires

Posons E_{ij} la matrice élémentaire : $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{1\leqslant k,l\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- $E_{kl}E_{ij} = \delta_{il}E_{kj}$
- Si $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$E_{kl}A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ L_l \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{(k-ème ligne)}$$

- Si $A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$AE_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & C_k & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ (l-ème colonne)}$$

Définition 4.3.3: Opérations élémentaires et matrices

- Transposition : $L_i \longleftrightarrow L_j$ et $C_i \longleftrightarrow C_j$. Ces opérations **multiplient le déterminant par** -1.
- Dilatation : Posons $\lambda \in \mathbb{K}$ ei $i \in [\![1\,, n]\!]$,

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  $D_i(\lambda)A$ correspond à $L_i \leftarrow \lambda L_i$
  $AD_j(\lambda)$ correspond à $C_j \leftarrow \lambda C_j$
- Transvection : Posons pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour $i \neq j$,

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$

  $T_{ij}(\lambda)A$ correspond à $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
  $AT_{ij}(\lambda)$ correspond à $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

- ◁ Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau.
- ◁ Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image.
- ◁ Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes conservent le rang.

Corollaire 4.3.4: Caractéristiques de la matrice obtenue par pivot

Soit A' la matrice obtenue par élimination de Gauss-Jordan à A.

- ◁ A est inversible *si et seulement si* les coefficients diagonaux de A sont tous non-nuls.
- ◁ $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A)$.
- ◁ $\det(A') = \det(A)$ **seulement si on a effectué l'algorithme sans dilatation**.

B.2 Générateurs de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$ ⋆⋆

Théorème 4.3.5

Les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. On réalise un pivot de Gauss avec uniquement des transvections.

- ◁ On se ramène à $a_{11} = 1$ par une transvection $L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1 - a_{11}}{a_{k1}} L_k$, avec k tel que $a_{k1} \neq 0$.
- ◁ Ensuite en effectuant $L_k \leftarrow L_k - a_{k1} L_k$ pour $k \in [\![2\,, n]\!]$, on obtient :

$$T_{d_1} \dots T_1 A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & \star & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

- ◁ $L_k \leftarrow C_k - a_{1k} C_k$ pour $k \in [\![2\,, n]\!]$:

$$T_{d_1} \dots T_1 A \tilde{T_1} \dots \tilde{T_{n_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & A_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$: on réitère les opérations sur A_1.
On obtient finalement :

$$T_N \dots T_1 A \tilde{T_1} \dots \tilde{T_N} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & k \end{pmatrix}$$

où $k = \det(A) = 1$. D'où le résultat.

On obtient également de cette manière un système de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: les transvections et les matrices $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$ pour $\alpha \in \mathbb{K}$.

IV) Formes linéaires, hyperplans, dualité

A) En dimension quelconque ⋆⋆⋆

Définition 4.4.1: Forme linéaire

Une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$.

Définition 4.4.2: Hyperplan

Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E qui admet une droite $\mathbb{K}x_0$ comme supplémentaire.

Théorème 4.4.3: Caractérisation forme linéaire-hyperplan

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- H est un hyperplan.
- $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}, J = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Démonstration. $\Rightarrow$: On pose φ l'unique AL de E dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi_{|H} = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})} \\ \varphi_{|\mathbb{K}x_0} : \begin{cases} \mathbb{K}x_0 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \alpha x_0 & \longmapsto & \alpha \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie ensuite que $\mathrm{Ker}\,\varphi = H$.

$\Leftarrow$: On prend $x_0 \neq 0$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. On peut supposer $\varphi(x_0) = 1$. On montre que $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$.

- Soit $y \in H \cap \mathbb{K}x_0$. Alors $y = \alpha x_0$ et $0 = \varphi(y) = \alpha\varphi(x_0)$ d'où $\alpha = 0$ et $y = 0$.
- Pour $x \in E$, $x = \underbrace{x - \varphi(x)x_0}_{=y} + \underbrace{\varphi(x)x_0}_{\in \mathbb{K}x_0}$.

  Or $\varphi(y) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$ d'où $y \in H$.

Lemme 4.4.4: Colinéarité de formes linéaires

Soient φ et ψ dans E^*.

- $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi \iff \psi \in \operatorname{Vect}(\varphi)$
- $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\varphi$

Démonstration. $\Leftarrow$: évident

$\Rightarrow$: En passant par les noyaux, si $\varphi = 0$, alors $\psi = 0$.
Sinon, soit $x_0 \in E \setminus \operatorname{Ker}\varphi$. Comme précédemment $\varphi(x_0) = 1$.
D'une part $\operatorname{Ker}\varphi \oplus \mathbb{K}x_0 = E$. Soit $\psi_0 = \psi(x_0)\varphi$.
Comme $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi, \psi_{|\operatorname{Ker}\varphi} = 0_{\mathcal{L}(\operatorname{Ker}\varphi,\mathbb{K})} = \psi_{0|\operatorname{Ker}\varphi}$ et $\psi_0(x_0) = \psi(x_0)$ donc $\psi_0 = \psi$ et $\psi \in \operatorname{Vect}\varphi$.

Lemme 4.4.5: Important pour la suite

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in (E^*)^n$. On pose :

$$\theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre *si et seulement si* θ est surjective.

Démonstration. $\Leftarrow$: On suppose θ surjective. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K}^n)}$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Soit $x \in E$ tel que

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} = \theta(x) = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Alors en appliquant la somme à x, on obtient $\alpha_j = 0$ pour tout j. D'où la liberté.

$\Rightarrow$: Supposons que θ n'est pas surjective. Alors $\operatorname{rg}\theta \leqslant n-1$. On dispose donc de H hyperplan de $\mathbb{K}^n$, tel que $\operatorname{Im}\theta \subseteq H$.
On se donne $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tels que :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

Pour tout $x \in E$, $\theta(x) \in H$ donc $\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x) = 0$.

Ainsi $\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i = 0$ et la famille est liée.

B) CNS pour que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$ ⋆⋆

Lemme 4.4.6

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi) \in (E^*)^{n+1}$. Alors,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi) \iff \psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_j, j \in [\![1, n]\!])$$

Démonstration. $\lhd \Leftarrow$: Supposons $\psi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j$. Si pour tout $j \in [\![1, n]\!], \varphi_j(x) = 0$ alors $\psi(x) = 0$. D'où l'inclusion annoncée.

$\lhd \Rightarrow$: On note $r = \mathrm{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Quitte à renuméroter,

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

Pour $j \in [\![r+1, n]\!]$, $\varphi_j \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ donc $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_j)$. D'où $\bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_j) = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_j)$.

Supposons $\bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_j) \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$.

$$\tilde{\theta} : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

De plus $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,\tilde{\theta}$. Donc $\tilde{\theta}$ n'est pas surjective.

Donc $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi)$ n'est pas libre. Comme $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ était libre,

$$\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

C) Autour des bases duales ⋆⋆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $n = \dim E = \dim(E^*)$.

Théorème 4.4.7: Base duale

Pour tout $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, il existe une unique base E^* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2\,, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Cette base est appelée *base duale* de E.

Démonstration. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base, pour $i \in [\![1\,,n]\!]$ il existe bien un unique $\varphi_i \in E^*$ tel que $\forall j \in [\![1\,,n]\!]\,, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Montrons que c'est une base de E^*.

Soit $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0_{E^*}$. D'où $\alpha_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(e_j) = 0_{\mathbb{K}}$. D'où la liberté.

C'est donc une base comme $n = \dim E^*$.

Corollaire 4.4.8

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ la base duale associée.

$$\forall x \in E, x = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) e_j$$

$$\forall \psi \in E^*, \psi = \sum_{j=1}^{n} \psi(e_j) \varphi_j$$

On a :

$$\varphi_j : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & x_j \end{array} \right.$$

Démonstration. $\lhd$ Soit $x \in E$. $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $\forall j \in [\![1\,,n]\!]$, $\varphi_j(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_j(e_i) = x_j$

d'où $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$.

$\lhd$ Soit $\psi \in E^*$. On note $\psi_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \psi(e_j) \varphi_j$. Pour $i \in [\![1\,,n]\!]$, $\psi_0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \psi(e_j) \underbrace{\varphi_j(e_i)}_{=\delta_{ij}} = \psi(e_i)$

donc $\psi = \psi_0$.

Théorème 4.4.9: Base antéduale

Pour tout $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de E^*. Il existe une unique base de E $e = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ soit la base duale associée.

Démonstration. Soit $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \end{array} \right.$ qui est surjective par le Lemme 4.4.5 car $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre. Par égalité des dimensions, c'est un isomorphisme.
En particulier pour tout $j \in [\![1\,, n]\!]$, $(\delta_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ admet un antécédent e_j par θ *id est* il existe bien un unique e_j tel que pour tout i, $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$; et $(e_1, \dots, e_n)$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ par θ^{-1}. Donc comme θ^{-1} est un isomorphisme, c'est une base de E.

Proposition 4.4.10

$$\xi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & \xi_x : \left\{ \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Démonstration. $a \in \operatorname{Ker} \xi \iff \forall \varphi \in E^*, \varphi(a) = 0 \iff a = 0$. Puis on a l'isomorphisme par égalité des dimensions.

D) Dualité et dimensions ⋆⋆

Théorème 4.4.11

Soient $H_1, \dots, H_r$ des hyperplans de E. Alors :

$$\dim \left(\bigcap_{j=1}^{r} H_j \right) \geqslant \dim E - r$$

Démonstration. Par récurrence sur r.

- ◅ $\underline{r = 1}$: $\dim H_1 = \dim E - 1$.
- ◅ Supposons la propriété vraie pour $(r-1)$ hyperplans.

  Soit $H_r = \operatorname{Ker}(\varphi_r), \varphi_r \in E^* \setminus \{0\}$. Posons $F = \bigcap_{j=1}^{r-1} H_j$. On sait déjà que

  $$\dim F = \dim \left(\bigcap_{j=1}^{r-1} H_j \right) \geqslant n - (r-1)$$

  On considère $\tilde{\varphi} = \varphi_{r\,|F} \in \mathcal{L}(F, \mathbb{K})$.
  - — Cas 1 : $\tilde{\varphi} = 0$. Alors :

    $$\bigcap_{j=1}^{r} H_j = F \cap H_r = F \cap \operatorname{Ker}(\varphi_r) = \operatorname{Ker} \tilde{\varphi} = F$$

    D'où $\dim \left(\bigcap_{j=1}^{r-1} H_j \right) = \dim F \geqslant n - r + 1 \geqslant n - r$.

— Cas 2 : $\tilde{\varphi} \neq 0$. Alors $\bigcap_{j=1}^{r} H_j = \operatorname{Ker} \tilde{\varphi}$ est un hyperplan de F. D'où $\dim\left(\bigcap_{j=1}^{r} H_j\right) = \dim F - 1 \geqslant n - r$.

On peut donner un théorème plus précis, mais moins rapide à démontrer :

Théorème 4.4.12

Pour $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in (E^*)^r$,

$$\dim\left(\bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_j\right) = \dim E - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

Démonstration. Deux démonstrations sont possibles.

◁ On peut reprendre la démonstration précédente.
Supposons la propriété vraie pour $(r-1)$ hyperplans.
Soit $H_r = \operatorname{Ker}(\varphi_r), \varphi_r \in E^* \setminus \{0\}$. Posons $F = \bigcap_{j=1}^{r-1} H_j$. On sait déjà que

$$\dim F = \dim\left(\bigcap_{j=1}^{r-1} \operatorname{Ker} \varphi_j\right) \geqslant n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1})$$

On considère $\tilde{\varphi} = \varphi_{r|F} \in \mathcal{L}(F, \mathbb{K})$.

— Cas 1 : si $\varphi_r \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}), \tilde{\varphi} = 0$ et $\operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1})$.

— Cas 2 : $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est libre. Par le Lemme 4.4.6,

$$F \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_r$$

ainsi $\tilde{\varphi} \neq 0$ et

$$\begin{aligned} \dim\left(\bigcap_{j=1}^{r-1} \operatorname{Ker} \varphi_j\right) &= \dim(\tilde{\varphi}) = \dim F - 1 \\ &= n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}) - 1 \\ &= n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \end{aligned}$$

◁ On peut aussi utiliser le Lemme 4.4.5.
Soit $m = \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$. Quitte à renuméroter, $\operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.
Ainsi, $\theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \end{cases}$ est surjective.
Or $\operatorname{Ker} \theta = \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{Ker} \varphi_j = \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_j$ et ainsi par théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} \theta = \dim E - \operatorname{rg} \theta = \dim E - m = n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

E) Hyperplans de matrices ⋆⋆

Lemme 4.4.13: Caractérisation des formes linéaires matricielles

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$. Alors, il existe une unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que

$$\varphi : M \longmapsto \mathrm{Tr}(AM)$$

Démonstration. Deux démonstrations possibles.

◁ Par analyse-synthèse. Posons $\varphi_A : M \longmapsto \mathrm{Tr}(AM)$.

— Analyse : Si $\varphi = \varphi_A$, $\varphi(E_{ij}) = Tr(AE_{ij}) = a_{ji}$ d'où $A = (\varphi(E_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

— Synthèse : Si $a_{ji} = \varphi(E_{ij})$ pour tous (i,j), $\varphi(E_{ij}) = \varphi_A(E_{ij})$. On a coïncidence sur une base donc $\varphi = \varphi_A$.

◁ On définit l'AL :

$$\theta : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{cases} \end{cases}$$

θ est injective car si $\theta(A) = 0$, pour tous $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$, $\varphi_A(E_{ij}) = 0$ soit $a_{ji} = 0$ et $A = 0$. Ainsi par dimensions θ est un isomorphisme.

Théorème 4.4.14: Tout hyperplan matriciel rencontre une matrice inversible

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \varnothing$$

Démonstration. Deux rédactions possibles.

◁ — Si $\varphi(I_n) = 0$ alors $I_n \in H$ et on a terminé.

— Si on dispose de $i \neq j$, $\varphi(E_{ij}) \neq 0$. Soit

$$T = I_n - \frac{\varphi(I_n)}{\varphi(E_{ij})} E_{ij}$$

et T convient.

— Si pour tous $i \neq j$, $\varphi(E_{ij}) = 0$, $M = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

◁ $\varphi = \varphi_A$. A est équivalente à K_r ($A = PK_rQ$) avec

$$K_r = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & & & \overbrace{1}^{r} & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} & \text{si } r < n \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(K_rQMP)$ et $\varphi(Q^{-1}P^{-1}) = \mathrm{Tr}(K_rI_n) = 0$.

V) Déterminant

A) Formes n-linéaires antisymétriques, alternées ⋆⋆⋆⋆

Définition 4.5.1: Généralités

Soit φ une forme n-linéaire sur E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

◁ On dit que φ est *alternée* si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \exists i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

◁ On dit que φ est *antisymétrique* si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (k,l) \in [\![1\,,n]\!]^2\,, k \neq l,$$
$$\varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, ..., \underbrace{x_l}_{k}, \dots, \underbrace{x_k}_{l}, \dots, x_n)$$

Cela équivaut à

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

Théorème 4.5.2

◁ Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, toute forme n-linéaire antisymétrique est alternée.

◁ Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique.

Démonstration. $\lhd \Rightarrow$: Supposons $x_k = x_l, k < l$.
$\varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = -\varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ d'où
$2\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ et comme $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$
$\lhd \Leftarrow$: Soit $k \neq l$.

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(x_1, \ldots, \overbrace{x_k + x_l}^{k}, \ldots, \overbrace{x_k + x_l}^{l}, \ldots, x_n) \\
&= \underbrace{\varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}_{=0} \\
&+ \varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \\
&+ \underbrace{\varphi(x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_l, \ldots, x_n)}_{=0}
\end{aligned}$$

D'où le résultat attendu.

Théorème 4.5.3: Définition du déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
L'espace $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1.
Pour tout e base de E, on note

$$\det_e : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n), x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \end{cases}$$

Alors : $\det_e(e) = 1$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{A}_n(E)$, $\varphi = \varphi(e)\det_e$.

Démonstration. $\lhd$ Soit $\varphi \in \mathcal{A}_n(E)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!], x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$. Par n-linéarité,

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n} \right) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n) \in [\![1,n]\!]^n} \prod_{j=1}^{n} a_{i_j,j} \underbrace{\varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})}_{=0 \text{ si } \exists j \neq k, i_j = i_k} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \varphi(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \qquad \text{où } (\sigma : j \mapsto i_j) \in \mathfrak{S}_n \\
&\quad \text{si les } (i_1, \ldots, i_n) \text{ sont deux-à-deux distincts} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \varphi(e_1, \ldots, e_n) \qquad \text{par antisymétrie} \\
&= \varphi(e_1, \ldots, e_n) \det_e(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

id est $\varphi = \varphi(e)\det_e$ d'où $\dim \mathcal{A}_n(E) \leqslant 1$.

◁ On montre ensuite que $\det_e \in \mathcal{A}_n(E)\setminus\{0\}$.
Il suffit de remarquer que si $\psi_1, \dots, \psi_n$ sont n-linéaires,

$$\theta : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \psi_j(x_j) \end{cases} \quad \text{est } n\text{-linéaire}$$

$$\xi : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \psi_j(x_{\sigma(j)}) \end{cases} \quad \text{est } n\text{-linéaire alternée}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \xi(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \psi_j(x_{\tau\circ\sigma(j)}) \\ &= \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\tau^{-1}\circ\sigma') \prod_{j=1}^{n} \psi_j(x_{\sigma'(j)}) \qquad \text{avec } \sigma' = \tau\circ\sigma \\ &= \varepsilon(\tau)\xi(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Ainsi $\det_e \in \mathcal{A}_n(E)$ et $\det_e(e) = 1$ (car $a_{\sigma(j),j} = \delta_{\sigma(j),j}$).

B) CNS de liberté ⋆⋆⋆⋆

Théorème 4.5.4

Soient e et e_0 deux bases de E. Alors, $\det_{e_0}(e)\det_e(e_0) = 1$.

Démonstration. $\det_e = \det_e(e_0)\det_{e_0}$ puis on évalue en e.

Théorème 4.5.5

Soit e une base de E. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\det(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ base}$$

Démonstration. Si la famille est libré, par n-linéarité, $\det_e(x_1, \dots, x_n) = 0$. Si la famille est libre, c'est une base et $\det_e(f)\det_f(e) = 1$ et $\det_e(f) \neq 0$

C) Déterminant d'un endomorphisme ⋆⋆⋆⋆

Définition 4.5.6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et e base de E. On définit

$$\det_e(u) = \det_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

Cela ne dépend pas de la base choisie, et on le note $\det u$.

Démonstration. Voir le cours de première année.

Proposition 4.5.7

Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.

Démonstration. Voir le cours de première année.

D) Déterminant d'une matrice, développement ⋆⋆⋆⋆

Définition 4.5.8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On définit :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Proposition 4.5.9: Propriétés du déterminant matriciel

- Le déterminant de A est le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes.
- Le déterminant de A est le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à A.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A) \neq 0 \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Démonstration. Voir le cours de première année.

Définition 4.5.10: Comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note A_{ij} la mtrice extraite obtenue en retirant la ligne i et la colonne j. Soit $\Delta_{ij} = \det(A_{ij})$.

On appelle *cofacteur* $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et *comatrice* de A la matrice des cofacteurs :

$$\mathrm{Com}(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Théorème 4.5.11: Développement selon une ligne ou une colonne

Avec les notations précédentes,

- Pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\Delta_{ik}$$

- Pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}\Delta_{kj}$$

- $\mathrm{Com}(A)^\top A = \det A I_n$
- $A\mathrm{Com}(A)^\top = \det A I_n$
- Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top$

Démonstration. Voir le cours de première année.

E) Déterminants classiques ⋆⋆⋆

Théorème 4.5.12: Déterminant de Vandermonde

On pose $V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Alors :

$$V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$$

Démonstration. **Il existe de nombreuses démonstrations de ce déterminant. En voici une qui me semble être celle occasionnant le moins d'erreurs techniques.** On procède par récurrence sur n. C'est évident pour $n = 1, n = 2$.

Pour l'hérédité, posons $P(X) = V(a_1, \dots, a_n, X) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots & a_2 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & X & \dots & \dots & X^n \end{vmatrix}$ C'est un polynôme en X en développant selon la $(n+1)$-ème ligne, de coefficient dominant $V(a_1, \dots, a_n)$. On distingue deux cas :

- ◅ S'il existe $i \neq j$, $a_i = a_j$. Alors $V(a_1, \dots, a_n) = 0$ et $V(a_1, \dots, a_{n+1}) = 0$.
- ◅ Sinon, on a $n = \deg P$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = 0$ (car det est alternée). Donc P a n racines distinctes et est de degré n :

$$P = [P] \prod_{i=1}^{n} (X - a_i) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$$

En particulier $V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{j=1}^{n} (a_{n+1} - a_j)$. On conclut par hypothèse de récurrence.

Théorème 4.5.13: Déterminant de Cauchy

Soient $(a_1, \dots, a_n)\mathbb{C}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que pour tout i et j, $a_i + b_j \neq 0$.

Posons $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$. Alors :

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur la taille du déterminant n.
Premièrement, faisons apparaître une ligne de 1 en multipliant toutes les colonnes par $a_n + b_j$.
Par n-linéarité du déterminant,

$$D_n = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} (a_n + b_i)} \begin{vmatrix} \frac{a_n+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_1+b_2} & \dots & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_n+b_1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{a_n+b_n}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Ensuite, pour faire apparaître des 0 à la fin des $(n-1)$ premières colonnes, soustrayons la dernière colonne à toutes les autres. Remarquons à cet effet que :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n-1]\!]^2\,,\ \frac{a_n+b_j}{a_i+b_j}-\frac{a_n+b_n}{a_i+b_n}=\frac{(a_n-a_i)(b_n-b_j)}{(a_i+b_j)(a_i+b_n)}$$

On en déduit :

$$D_n=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(a_n+b_i)}\begin{vmatrix} \frac{(a_n-b_1)(b_n-b_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{(a_n-a_1)(b_n-b_{n-1})}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{(a_n-b_{n-1})(b_n-b_1)}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{(a_n-a_{n-1})(b_n-b_{n-1})}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} & \frac{a_n+b_n}{a_{n-1}+b_n} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On factorise les termes communs aux lignes et aux colonnes.

$$D_n=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(a_n+b_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-b_n)}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Finalement, en développant par rapport à la dernière ligne,

$$D_n=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(a_n+b_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-b_n)}D_{n-1}$$

Comme $D_1=\dfrac{1}{a_1+b_1}$, on obtient le résultat :

$$D_n=\frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}$$

VI) Noyaux itérés et applications

Dans toute cette partie $u \in \mathcal{L}(E)$.

A) Monotonie de $\mathrm{Ker}(u^k)$ et $\mathrm{Im}(u^k)$ ⋆⋆⋆

Rappel 4.6.1

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(u^k)$ et $\mathrm{Ker}(u^k) \subseteq \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.

Lemme 4.6.2

S'il existe $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}(u^n) = \operatorname{Ker}(u^{n+1})$. Alors pour $k \geqslant n$,

$$\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$$

Démonstration. Soit un tel $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \geqslant n$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u^{k+1})$.
$u^{n+1}(u^{k-n}(x)) = u^{k+1}(x) = 0$ donc $\operatorname{Im} u^{k-n} \subseteq \operatorname{Ker} u^{n+1} = \operatorname{Ker} u^n$. D'où :
$u^k(x) = u^n(u^{k-n}(x)) = 0_E$. On a donc bien $\operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u^k$.

Lemme 4.6.3

S'il existe $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}(u^n) = \operatorname{Im}(u^{n+1})$. Alors pour $k \geqslant n$,

$$\operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^{k+1}$$

Démonstration. Soit $k \geqslant n$. Soit $y \in \operatorname{Im} u^k$. On dispose de $x \in E$, $y = u^k(x) = u^{k-n}(u^n(x))$.
Or $u^n(x) \in \operatorname{Im}(u^n) = \operatorname{Im}(u^{n+1})$. Donc on dispose de z, $u^n(x) = u^{n+1}(z)$.
Ainsi $y = u^{k-n}(u^{n+1}(z)) = u^{k+1}(z) \in \operatorname{Im}(u^{k+1})$.

Exemple 4.6.4

Considérons

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

Alors les $\operatorname{Ker} u^k = \mathbb{K}_{k-1}[X]$ sont croissants pour l'inclusion.
On a $\operatorname{Im} u^k = \mathbb{K}[X]$ il y a égalité dès $k = 0$.

B) Particularités de la dimension finie ⋆⋆⋆

On note $n = \dim E < +\infty$.

Théorème 4.6.5

On dispose d'un rang $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Ker}(u^d) = \operatorname{Ker}(u^{d+1}) \\ \operatorname{Im}(u^d) = \operatorname{Im}(u^{d+1}) \end{array} \right.$. Alors,

$$\{0\} = \operatorname{Ker} u^0 \subsetneq \operatorname{Ker} u^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ldots \operatorname{Ker} u^d = \operatorname{Ker} u^{d+1}$$

$$\operatorname{Im} u^{d+1} = \operatorname{Im} u^d \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Im} u \subsetneq \operatorname{Im} u^0 = E$$

Démonstration. $(\dim \operatorname{Ker} u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers, majorée par n donc stationnaire. On peut donc considérér :

$$d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}\}$$

Alors par le Lemme 4.6.2,

$$\{0\} = \operatorname{Ker} u^0 \subsetneq \operatorname{Ker} u^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ldots \operatorname{Ker} u^d = \operatorname{Ker} u^{d+1}$$

Pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} \geqslant \dim \operatorname{Ker} u^k + 1$ d'où $n \geqslant \dim \operatorname{Ker} u^d \geqslant d$.
Par théorème du rang,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^{k+1} &\iff \operatorname{rg} u^k = \operatorname{rg} u^{k+1} \\ &\iff \dim \operatorname{Ker} u^k = \dim \operatorname{Ker} u^{k+1} \\ &\iff \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1} \end{aligned}$$

C) $E = N \oplus I$ ⋆⋆

On pose avec les notations précédentes, $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} u^n = \operatorname{Ker} u^d$ et $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im} u^n = \operatorname{Im} u^d$.

Théorème 4.6.6

- ◅ N et I sont stables par u. L'application u_N induite par u sur N est nilpotente. u_I est inversibles. On a $E = N \oplus I$.
- ◅ Réciproquement, si $E = N_0 \oplus I_0$ avec N_0 et I_0 stables par u, avec u_{N_0} nilpotent et u_{I_0} inversible ; alors $N = N_0$ et $I = I_0$.

Démonstration. ◅ — Soit $x \in \operatorname{Ker} u^k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $u(x) \in \operatorname{Ker}(u^{k-1}) \subseteq N$.
— Soit $x \in \operatorname{Im} u^d$, $x = u^d(y)$ alors $u(x) = u^d(u(y)) = u^{d+1}(y) \in \operatorname{Im} u^d = I$.
— Soit $x \in N$. $u_N^d(x) = u^d(x) = 0$ car $x \in \operatorname{Ker} u^d$. D'où $u_N^d = 0_{\mathcal{L}(N)}$.
— Soit $x \in N \cap I = \operatorname{Ker} u^d \cap \operatorname{Im} u^d$. Soit $y \in E, x = u^d(y)$. Or $0 = u^d(x) = u^{2d}(y)$. Ainsi $y \in \operatorname{Ker}(u^{2d}) = \operatorname{Ker}(u^d)$. D'où $x = 0$.
Ainsi $N \oplus I \subseteq E$ et par théorème du rang appliqué à u^d, on a égalité.
— Soit $x \in \operatorname{Ker} u_I = \operatorname{Ker} u \cap I \subseteq \operatorname{Ker} u^d \cap I = N \cap I = \{0\}$. Donc u_I injective et ainsi $u_I \in \mathrm{GL}(I)$.
◅ — Montrons que $N_0 \subseteq N$: u_{N_0} est nilpotente. Pour un certain $p \in \mathbb{N}^*, u_{N_0}^p = 0_{\mathcal{L}(N)}$ *id est* pour tout $x \in N_0$, $u^p(x) = 0$. Donc $N_0 \subseteq \operatorname{Ker} u^p \subseteq N$.
— Montrons que $I_0 \subseteq I$: $u_{I_0} \in \mathrm{GL}(I_0)$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, u_{I_0}^k \in \mathrm{GL}(I_0)$. D'où $I_0 = u_{I_0}^k(I_0) \subseteq \operatorname{Im}(u^k)$ donc $I_0 \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}(u^k) = I$.
— Or $E = N_0 \oplus I_0 = N \oplus I$ d'où

$$\dim E = \dim N_0 + \dim I_0 \leqslant \dim N + \dim I = \dim E$$

d'où $N_0 = N$ et $I_0 = I$.

VII) Un lemme sur les unions de sous-espaces vectoriels ⋆⋆

Lemme 4.7.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini. Si $F_1, \dots, F_d$ sont des sous-espaces vectoriels et $\bigcup_{j=1}^{d} F_j$ est un sous-espace vectoriel, alors il existe $k \in [\![1\,,d]\!]\,, \bigcup_{j=1}^{d} F_j = F_k$.

Démonstration. On procède par récurrence sur d.

- $\underline{d=2}$: $F_1 \cup F_2$ sous-espace vectoriel. Supposons par exemple $F_1 \not\subset F_2$. Montrons que $F_2 \subseteq F_1$.
  Soit $x \in F_1 \backslash F_2$. Pour $y \in F_2$, $x+y \in F_1 \cup F_2$.
  - si $x+y \in F_1$, $y = (x+y) - x \in F_1$: impossible
  - si $x+y \in F_2$, $x = (x+y) - y \in F_2$: impossible

  Donc $y \in F_1$ et $F_2 \subseteq F_1$.
- Une erreur courante est d'appliquer le cas $d=2$ dans l'hérédité mais c'est impossible : ce n'est pas parce que $\bigcup_{j=1}^{d+1} F_j$ est un sous-espace vectoriel que $\bigcup_{j=1}^{d} F_j$ est un sous-espace vectoriel !
- Supposons le résultat vrai pour une union de d sous-espaces vectoriels. Soient $F_1, \dots, F_{d+1}$ des sous-espaces tels que $G = \bigcup_{j=1}^{d+1} F_j$ soit un sous-espace. On distingue 3 cas :
  - $\underline{\text{Cas 1}}$: $G = \bigcup_{j=1}^{d} F_j$ ($id\ est\ F_{d+1} \subseteq \bigcup_{j=1}^{d} F_j$). On conclut par hypothèse de récurrence.
  - $\underline{\text{Cas 2}}$: $G = F_{d+1}$.
  - $\underline{\text{Cas 3}}$: $\begin{cases} F_{d+1} \not\subset \bigcup_{j=1}^{d} F_j \\ \bigcup_{j=1}^{d} F_j \not\subset F_{d+1} \end{cases}$. Soit $\begin{cases} x \in F_{d+1} \backslash \bigcup_{j=1}^{d} F_j \\ y \in \bigcup_{j=1}^{d} F_j \backslash F_{d+1} \end{cases}$ Alors, $x, y \in G$.
    Donc pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $x + \alpha y \in G$ donc on dispose de $j_\alpha \in [\![1\,,d+1]\!]$ tel que $\alpha x + y \in F_{j_\alpha}$.
    Par l'absurde si $j_\alpha = d+1$, $y = (\alpha x + y) - \alpha x \in F_{d+1}$ (impossible). Donc $j_\alpha \leqslant d$.
    Comme $\mathbb{K}$ est infini, et que $\{j_\alpha, \alpha \in \mathbb{K}\}$ est fini, on dispose de $\beta \neq \alpha$ tels que $j_\alpha = j_\beta = \rho \in [\![1\,,d]\!]$ $id\ est$ $\begin{cases} \alpha x + y \in F_\rho \\ \beta x + y \in F_\rho \end{cases}$ d'où

$$x = \frac{1}{\alpha - \beta}\left((\alpha x + y) - (\beta x + y)\right) \in F_\rho$$

Chapitre 5

Réduction

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie**, où $\mathbb{K}$ est un corps.

I) Rappels de cours et premiers compléments ⋆⋆⋆⋆

A) Valeurs propres et vecteurs propres

A.1 Cas d'un endomorphisme

Définition 5.1.1: Valeur propre

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $x_0 \in E \setminus \{0\}$ est appelé *vecteur propre* de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.
C'est équivalent à dire que $\mathbb{K}x_0$ est stable par u.

Définition 5.1.2: Vecteur propre

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.
Alors x_0 est appelé vecteur propre associé.

Lemme 5.1.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. λ est valeur propre de u
2. $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$
3. $u - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas injectif
4. $u - \lambda \mathrm{id} \notin \mathrm{GL}(E)$

Définition 5.1.4: Spectre

On définit le spectre u, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ valeur propre de } u\}$.

Définition 5.1.5: Sous-espace propre

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On appelle sous-espace propre associé à λ,

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins 1.
L'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$ est une homothétie.

Théorème 5.1.6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathrm{Sp}(u)$, deux-à-deux distincts. Alors :

$$\bigoplus_{j=1}^{d} E_{\lambda_j}(u) \subseteq E$$

En conséquence, $|\mathrm{Sp}(u)| \leqslant \dim E$.

Voici un premier complément à la frontière du programme :

Proposition 5.1.7

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$.
Alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Par hypothèse,

$$(u - \lambda \mathrm{id}) \circ v = u \circ v - \lambda v = v \circ (u - \lambda \mathrm{id})$$

Donc v laisse stable $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) = E_\lambda(u)$.

Remarque 5.1.8

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $0 \in \mathrm{Sp}(u) \iff u \notin \mathrm{GL}(E)$.
Dans ce cas, $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

A.2 Cas d'une matrice

Définition 5.1.9: Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ non-nul est appelé vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $AX = \lambda X$. λ est alors appelée valeur propre associée.
Les valeurs propres et vecteurs propres de A sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$$a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

Le spectre de A dans $\mathbb{K}$ est alors :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists X \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}, AX = \lambda X\}$$

En général on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subsetneq \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Pour un endomorphisme, cela n'a pas de sens de distinguer $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u)$, car un $\mathbb{R}$-espace vectoriel n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On retrouve la caractérisation précédente :

Lemme 5.1.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lambda \in \mathrm{Sp}A$
2. $\exists X \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}, AX = \lambda X$
3. $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_E\}$
4. $A - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

On appelle **équation aux valeurs propres** l'équation suivante :

$$AX = \lambda X, X \neq 0_E$$

Exemple 5.1.11: Exemple de recherche d'éléments propres

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A \in E \backslash \{0\}$. Soit

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & X - \mathrm{Tr}(X)A \end{cases}$$

Déterminer les éléments propres de φ.

- ◅ On a bien pour $X \in E$, $\varphi(X) \in E$. Par linéarité de la trace, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
  Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(X) = \lambda X \iff (1-\lambda)X = \mathrm{Tr}(X)A$.
- ◅ Si $\lambda = 1$, $\varphi(X) = X \iff \mathrm{Tr}\, X = 0$. D'où $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et

  $$E_1(\varphi) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}\, X = 0\} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$$

  de dimension $n^2 - 1$.
- ◅ Si $\lambda \neq 1$, $\varphi(X) = \lambda X \iff X = \dfrac{\mathrm{Tr}\, X}{1-\lambda} A \in \mathrm{Vect}(A)$. On vérifie ensuite que $\mathrm{Vect}(A)$ est une droite stable :
  $\varphi(A) = (1 - \mathrm{Tr}\, A)A$. Si $\mathrm{Tr}\, A = 0$, $A \in E_1(\varphi)$. Sinon, $1 - \mathrm{Tr}\, A \in \mathrm{Sp}(A)$ et $E_{1-\mathrm{Tr}\, A}(\varphi) = \mathrm{Vect}(A)$.

Ainsi $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1, 1 - \mathrm{Tr}\, A\}$.

B) Polynômes : possibilités et particularités

B.1 Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal

Théorème 5.1.12: Morphismes d'algèbres et polynôme annulateur

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose :

$$\theta_u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \longmapsto & P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \end{cases}$$

Alors :

- θ_u est un morphisme d'algèbres.
- $\operatorname{Im}\theta_u$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et est notée $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$.
- $\operatorname{Ker}\theta_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ noté $I_u = \left\{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\right\}$ appelé idéal des polynômes annulateurs.
- Si de plus E est de dimension finie, $I_u = \operatorname{Ker}\theta_u \neq \{0\}$. Il existe donc un unique polynôme unitaire π_u tel que $I_u = (\pi_u) = \pi_u\mathbb{K}[X]$. π_u est appelé *polynôme minimal* de u.

Démonstration. ◁ Morphisme d'algèbres :

— $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et θ_u est l'unique application linéaire qui envoie (X^n) sur (u^n).

— On a bien $\theta_u(1) = \theta_u(X^0) = 1_{\mathcal{A}}$.

— Par linéarité, pour montrer $\theta_u(PQ) = \theta_u(P)\theta_u(Q)$, il suffit de le montrer sur les monômes.
Or $\theta_u(X^pX^q) = \theta_u(X^{p+q}) = u^{p+q} = u^pu^q = \theta_u(P)\theta_u(Q)$.

◁ Image : c'est évident par le point précédent.

◁ Noyau : on a déjà montré que le noyau d'un morphisme d'anneaux (et donc d'algèbres) était un idéal de l'ensemble de départ. Ici $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal donc l'idéal I_u est principal.

◁ Existence du polynôme minimal : en dimension finie, θ_u n'est pas injectif. En effet, si θ_u était injectif, comme θ_u est surjectif, on aurait θ_u bijectif. Alors $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]$ de dimension finie. Ainsi $\operatorname{Ker}\theta_u \neq \{0\}$. Ainsi I_u n'est pas trivial et on en déduit l'existence de π_u.

Remarque 5.1.13: Nature des objets

$$\underbrace{P(u)}_{\in\mathcal{L}(E)}\Big(\underbrace{x}_{\in E}\Big) \neq \underbrace{P(u(x))}_{\text{AUCUN SENS !}}$$

La propriété clée est :

$$(PQ)(u)(x) = (P(u)\circ Q(u))(x) = P(u)(Q(u)(x))$$

et non $P(Q(u)(x))$ ou $P(u)(x) \times Q(u)(x)$...

Dans la suite, on considère que E est de dimension finie, notée n.

Théorème 5.1.14: Dimension et base de $\mathbb{K}[u]$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note π_u son polynôme minimal.
$\mathbb{K}[u]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative de dimension $\deg(\pi_u) = d$, et $(1, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Démonstration. Par division euclidienne, on a : $\mathbb{K}[X] = (\pi_u) \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
Or par théorème du rang, θ_u induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ (c'est un supplémentaire de son noyau). Ainsi $\mathbb{K}_{d-1}[X] \simeq \operatorname{Im}\theta_u = \mathbb{K}[u]$. On envoie ensuite une base de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ sur $\mathbb{K}[u]$.

B.2 Irréductibilité du polynôme minimal (complément) ⋆⋆⋆

Proposition 5.1.15

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\mathbb{K}[u]$ est intègre ;
- $\mathbb{K}[u]$ est un corps ;
- π_u est irréductible

Démonstration.
- (1) ⇒ (3) : On a $0 = \pi_u(u) = Q(u)R(u)$, si $\pi_u = QR$ donc par intégrité $Q(u) = 0$ ou $R(u) = 0$ soit $\pi_u \mid Q$ ou $\pi_u \mid R$. Donc ils sont associés.
  Ainsi, π_u est irréductible.
- (3) ⇒ (2) : Supposons que π_u est irréductible. Soit $Q(u) \in \mathbb{K}[u] \setminus \{0\}$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, donc π_u ne divise pas Q (sinon $Q(u) = 0$).
  Donc $\pi_u \wedge Q = 1$. D'après le théorème de Bézout, on dispose de $U, V \in \mathbb{K}[X]^2$, $U\pi_u + VQ = 1$ d'où $U(u)Q(u) = 1$. Ainsi $Q(u)$ est inversible.
  De plus $\mathbb{K}[u]$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$, donc c'est un corps.
- (2) ⇒ (1) : évident.

B.3 Polynôme caractéristique

Définition 5.1.16

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit le polynôme caractéristique de u :

$$\chi_u = \det(X\mathrm{id} - u) \in \mathbb{K}[X]$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$$

C'est un polynôme unitaire de degré n. Son coefficient constant est $(-1)^n \det(A)$. Son coefficient en X^{n-1} est $-\operatorname{Tr} A$.

On peut traduire ce qui a été vu précédemment avec ce nouvel outil :

Théorème 5.1.17: Racines de χ_A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \operatorname{Rac}_{\mathbb{K}}(\chi_A)$$

Attention à la confusion habituelle entre les deux aspects de la réduction : algébrique et géométrique.

Proposition 5.1.18: Multiplicités algébriques et géométriques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$.
On appelle *multiplicité algébrique* de λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u, notée m_λ.
On appelle *multiplicité géométrique* de λ l'entier $\dim E_\lambda(u)$.
On a toujours :

$$\dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda$$

Théorème 5.1.19: Cayley-Hamilton

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\chi_u \text{ est un polynôme annulateur de } u$$

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\pi_u \mid \chi_u$$

Démonstration. Ce théorème est admis. On en proposera une démonstration en devoir maison.

B.4 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$? (complément) ⋆⋆⋆

Proposition 5.1.20: Méthode générale

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$.

Démonstration. Soit $r = \operatorname{rg} A$.

◁ Cas $A = J_r$:
On note $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$ où B_1 est de taille $r \times r$ et B_4 de taille $(p-r) \times (n-r)$.
Alors $AB = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}$
Donc : $\chi_{AB} = X^{n-r}\chi_{B_1}$ et $\chi_{BA} = X^{p-r}\chi_{B_1}$ d'où le résultat.

◁ Cas général : $A = PJ_rQ$. Alors : $AB = PJ_rQB = P(J_r(QBP))P^{-1}$
$BA = BPJ_rQ = P^{-1}((QBP)J_r)P$
D'où $X^p\chi_{AB} = X^p\chi_{J_r(QBP)} = X^n\chi_{(QBP)J_r}$ par le cas 1. D'où finalement : $X^p\chi_{AB} = X^n\chi_{BA}$.

Proposition 5.1.21: Si $n = p$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Démonstration. On traite d'abord le cas A inversible.

◁ Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $AB = A(BA)A^{-1}$ donc AB et BA sont sembables d'où $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

◁ Or, à B fixé, $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues (car polynomiales en les (a_{ij})). Ces deux applications coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (voir la Proposition **6.6.4**) donc elles sont égales.

On en déduit immédiatement que $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

Proposition 5.1.22

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$. Si $\lambda \neq 0$, $E_\lambda(AB) \simeq E_\lambda(BA)$.

Démonstration. Soit X un vecteur propre de AB associé à λ : $ABX = \lambda X$.
Alors, $(BA)(BX) = \lambda(BX)$ ainsi $BX \in E_\lambda(BA)$.
Soient $u_B : \begin{cases} E_\lambda(AB) & \longrightarrow & E_\lambda(BA) \\ X & \longmapsto & BX \end{cases}$ et $u_A : \begin{cases} E_\lambda(BA)) & \longrightarrow & E_\lambda(AB) \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$.
Comme $\lambda \neq 0$, si $ABX = \lambda X$, alors $BX \neq 0$ donc u_B est injectif. De même u_A est injectif. Ainsi $\dim E_\lambda(AB) = \dim E_\lambda(BA)$ par double inégalité. Alors u_A et u_B sont des isomorphismes.

B.5 Théorème des noyaux

Lemme 5.1.23

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}\, P(u)$ est stable par u.

Démonstration. u et $P(u)$ commutent.

Théorème 5.1.24: Théorème des noyaux

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P = \prod_{j=1}^{d} P_j$ où les $(P_j)_{1 \leqslant j \leqslant d}$ sont premiers entre eux deux-à-deux. Alors,

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{j=1}^{d} \operatorname{Ker} P_j(u)$$

Corollaire 5.1.25

Si P est un polynôme annulateur de u alors :

$$E = \bigoplus_{j=1}^{d} \operatorname{Ker} P_j(u)$$

Démonstration. Si $P(u) = 0$, alors $\operatorname{Ker} P(u) = E$.

Proposition 5.1.26: Complément important

Les projecteurs associés à la décomposition $\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{j=1}^{d} \operatorname{Ker} P_j(u)$ sont des polynômes en u.
Plus formellement, si p_j est le projecteur sur $\operatorname{Ker} P_j(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{k \neq j} P_k(u)$, $p_j \in \mathbb{K}[u]$.

Démonstration. On suppose que P est un polynôme annulateur. Dans ce cas $E = \bigoplus_{j=1}^{d} \operatorname{Ker} P_j(u)$.
Montrons que les projecteurs associés à cette décomposition sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$.
On pose pour $j \in [\![1\,, d]\!]$, $Q_j = \prod_{k \neq j} P_k$.

- On a $Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_d = 1$. En effet si π irréductible divise Q_1 alors il divise un des P_k. Alors $\pi \wedge Q_k = 1$.
- On écrit la relation de Bézout :

$$\sum_{j=1}^{d} V_j Q_j = 1$$

Par morphisme d'algèbres, $\sum_{j=1}^{d} \underbrace{V_j(u) \circ Q_j(u)}_{=p_j} = \mathrm{id}_E$.

On montre que : $\forall x \in E, p_j(x) \in \operatorname{Ker} P_j(u)$. En effet si $x \in E$,

$$\begin{aligned} P_j(u)(p_j(x)) &= P_j(u) \circ V_j(u) \circ Q_j(u)(x) \\ &= V_j(u) \circ (\underbrace{P_j Q_j}_{=P})(u)(x) \\ &= 0_E \text{ car } P \text{ annule } u \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in E, x = \sum_{j=1}^{d} \underbrace{p_j(x)}_{\in \operatorname{Ker} P_j(u)}$.

Donc p_j est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(P_j(u))$, parallèlement à $\bigoplus_{k \neq j} \operatorname{Ker} P_k(u)$.

C) Diagonalisation

C.1 Généralités

Théorème 5.1.27: Tout sur la diagonalisabilité

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable
- Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u
- Il existe une base e de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_e(u)$ est diagonale
- $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$
- χ_u scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$
- $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$
- u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples
- π_u scindé à racines simples

Remarque 5.1.28: Erreur classique

Attention, χ_u scindé à racines simples $\Rightarrow$ u diagonalisable MAIS LA RECIPROQUE EST FAUSSE. Voici un contre-exemple (qui marche en dimension quelconque n) :

$$M = \begin{pmatrix} a & & & \\ & \ddots & (b) & \\ & & \ddots & \\ & (b) & & \ddots \\ & & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

◁

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X-a & & & & \\ & \ddots & & (-b) & \\ & & \ddots & & \\ & (-b) & & \ddots & \\ & & & & X-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X-a+b & & & & -b \\ a-b-X & \ddots & & (0) & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ (0) & & \ddots & X-a+b & -b \\ & & & a-b-X & X-a \end{vmatrix} C_i \leftarrow C_i - C_{i+1}$$

$$= \begin{vmatrix} X-a+b & & & & -b \\ & \ddots & & (0) & -2b \\ & & \ddots & & \vdots \\ & (0) & & \ddots & -(n-1)b \\ & & & & X-a-(n-1)b \end{vmatrix} L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$$

$$= (X-(a+(n-1)b))(X-(a-b))^{n-1}$$

◁ Or, $\operatorname{rg}(M-(a-b)I_n) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} b & & & \\ & \ddots & & (b) \\ & & \ddots & \\ & (b) & & \ddots \\ & & & b \end{pmatrix} = 1$ donc $\dim E_{a-b}(M) = n-1$. De plus, $\dim E_{a+(n-1)b}(M) = 1$.

Donc M est diagonalisable mais χ_M n'a pas ses racines simples.

C.2 Commutant et bi-commutant (complément) ⋆⋆

Lemme 5.1.29

Soit u diagonalisable. Pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, u et v commutent *si et seulement si* v laisse stable les sous-espaces propres de u.

Démonstration. ◁ $\Rightarrow$: connu, et vrai dans le cas général

◁ $\Leftarrow$: Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, et $x \in E_\lambda(u)$.
On a $u \circ v(x) = u(v(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = v(u(x))$ donc $(u \circ v)_{|E_\lambda(u)} = (v \circ u)_{|E_\lambda(u)}$.
Comme $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u)$, $u \circ v = v \circ u$ sur E.

Corollaire 5.1.30: Dimension du commutant d'un diagonalisable

Si u est diagonalisable, alors :

$$\dim(\mathrm{Com}(u)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$$

Démonstration. Notons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. $v \in \mathrm{Com}(u) \iff \forall j \in [\![1, d]\!], v(E_{\lambda_j}(u)) \subseteq E_{\lambda_j}(u)$. Ainsi

$$\pi : \begin{cases} \mathrm{Com}(u) & \longrightarrow & \prod_{j=1}^{d} \mathcal{L}(E_{\lambda_j}(u)) \\ v & \longmapsto & v_{|E_{\lambda_1}(u)}, \dots, v_{|E_{\lambda_d}(u)} \end{cases}$$

est un isomorphisme d'où le résultat souhaité.

Définition 5.1.31: Bicommutant

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\mathrm{Bicom}(u) = \{w \in \mathcal{L}(E), \forall v \in \mathrm{Com}(u), w \circ v = v \circ w\}$$

Par exemple, $u \in \mathrm{Bicom}(u)$ car u commute avec tous les éléments de son commutant. On a $\mathrm{Bicom}(u) \subseteq \mathrm{Com}(u)$ car $u \in \mathrm{Com}(u)$. Plus généralement, $\mathbb{K}[u] \subseteq \mathrm{Bicom}(u)$.

Proposition 5.1.32: Bicommutant d'un diagonalisable

Si u est diagonalisable, $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Bicom}(u)$.

Démonstration. On montre seulement l'inclusion réciproque. Soit $w \in \mathrm{Bicom}(u)$. Alors $\forall j \in [\![1, d]\!], w(E_{\lambda_j}(u)) \subseteq E_{\lambda_j}(u)$. ainsi dans la base e de diagonalisation de u,

$$\mathrm{Mat}_e(w) = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{Bicom}(u) &\iff \forall v \in \mathrm{Com}(u), v \circ w = w \circ v \\ &= \forall (A_1, \dots, A_d) \in \prod_{j=1}^{d} \mathcal{M}_{d_j}(\mathbb{K}), \\ &\begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_d \end{pmatrix} \\ &\iff \forall j \in [\![1, d]\!], \forall A_j \in \mathcal{M}_{d_j}(\mathbb{K}), A_j M_j = M_j A_j \\ &\iff \forall j \in [\![1, d]\!], \exists \mu_j \in \mathbb{K}, M_j = \mu_j I_{d_j} \end{aligned}$$

Comme $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont deux-à-deux distincts, par interpolation de LAGRANGE, on dispose de $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1\,, d]\!]$, $P(\lambda_j) = \mu_j$.
Ainsi $P(\mathrm{Mat}_e(u)) = \mathrm{Mat}_e(w)$ et $w = P(u) \in \mathbb{K}[u]$.

D) Trigonalisation

D.1 Généralités

Théorème 5.1.33: Tout sur la trigonalisabilité

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est trigonalisable
- Il existe une base e de E telle que $\mathrm{Mat}_e(u)$ est triangulaire supérieure.
- χ_u est scindé
- Il existe un drapeau total de E stable par u, c'est-à-dire que si $e = (e_1, \dots, e_n)$, on a :

$$\forall i \in [\![1\,, n]\!]\,, \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) \text{ est stable par } u$$

Proposition 5.1.34: Expressions utiles

Pour un endomorphisme u trigonalisable, si $\chi_u = \prod_{j=1}^{d} (X - \lambda_j)^{m_j}$, on a :

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{j=1}^{d} m_j \lambda_j \text{ et } \det(u) = \prod_{j=1}^{d} \lambda_j^{m_j}$$

Démonstration. La trace et le déterminant sont des invariants de similitude.

D.2 Décomposition en sous-espaces caractéristiques

Théorème 5.1.35

Si χ_u ou π_u est scindé, si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ de multiplicités $m_1, \dots, m_d$, on note :

$$\chi_u = \prod_{j=1}^{d} (X - \lambda_j)^{m_j} \text{ et } \pi_u = \prod_{j=1}^{d} (X - \lambda_j)^{q_j}$$

Alors :

$$E = \bigoplus_{j=1}^{d} \underbrace{\mathrm{Ker}\left((u - \lambda_j \mathrm{id})^{m_j}\right)}_{=F_j}$$

On a de plus $u_{|F_j} = \lambda_j \mathrm{id} + n_j$ où n_j est nilpotent d'ordre q_j.

Il existe e une base de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) & & & & \\ & \ddots & & & & & (0) \\ & & \underbrace{\lambda_1}_{=m_1} & & & & \\ & & & \lambda_2 & & (\star) & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \underbrace{\lambda_2}_{=m_2} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_d \quad (\star) \\ & & (0) & & & & \ddots \\ & & & & & & \underbrace{\lambda_d}_{m_d} \end{pmatrix}$$

D.3 Décomposition de Dunford (complément) ⋆⋆⋆

Théorème 5.1.36: Dunford

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe d'uniques $\delta, \nu \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

- δ est diagonalisable
- ν est nilpotent
- $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$
- $u = \delta + \nu$

Démonstration. On définit $\delta \in \mathcal{L}(E)$, tel que pour $j \in [\![1\,,d]\!]$, $\delta_{F_j} = \lambda_j \mathrm{id}_{F_j}$; et $\nu \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $j \in [\![1\,,d]\!]$, $\nu_{F_j} = n_j$.

- $u = \delta + \nu$: sur chaque F_j, $u_{F_j} = u_j = \lambda_j \mathrm{id}_{F_j} + n_j = \delta_{F_j} + \nu_{F_j}$ d'où $u = \delta + \nu$.
- δ est diagonalisable : $\forall j \in [\![1\,,d]\!]\,, E_{\lambda_j}(\delta) = F_j$ d'où $\mathrm{Sp}(\delta) = \mathrm{Sp}(u)$.
- ν est nilpotent : évident, l'ordre de nilpotence est $\max_{j\in[\![1\,,d]\!]} q_j$.
- $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$: sur chaque F_j, $\lambda_j \mathrm{id}_{F_j} \circ n_j = n_j \circ \lambda_j \mathrm{id}_{F_j}$ d'où $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$.
- Unicité : on considère la décomposition obtenue ci-dessus, $\delta = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j p_j$ où $p_1, \ldots, p_d$ sont les projecteurs associés à la décomposition du théorème des noyaux

$$E = \bigoplus_{j=1}^{d} \underbrace{\mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{id})^{m_j}}_{=F_j}$$

(c'est-à-dire que pour $x = \sum_{j=1}^{d} x_j$ où $x_j \in F_j$, $\delta(x) = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j x_j = (\sum_{j=1}^{d} \lambda_j p_j)(x)$).

Or d'après d'après la Proposition 5.1.26, pour $j \in [\![1\,,d]\!]$, $p_j \in \mathbb{K}[u]$ d'où $\delta \in \mathbb{K}[u]$ et

$v = u - \delta \in \mathbb{K}[u]$.
Supposons maintenant $u = \delta' + \nu'$ avec δ diagonalisable, ν nilpotent, et $\delta' \circ \nu' = \nu' \circ \delta'$. Donc δ' commute avec tous les polynômes en u donc en particulier avec δ. De même $\nu' \circ u = u \circ \nu'$. Donc de même ν' commute avec ν. Or $\delta + \nu = \delta' + \nu'$ *id est*

$$\underbrace{\delta - \delta'}_{\text{diagonalisable}} = \underbrace{\nu' - \nu}_{\text{nilpotent}}$$

ainsi $\delta - \delta' = \nu' - \nu = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exemple 5.1.37

Trouver la décomposition de DUNFORD de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

◁ On pourrait dire $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais ces deux matrices ne commutent pas entre elles.

◁ $\chi_A = (X-1)(X-2)(X-3)$ scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
La décomposition de DUNFORD est :

$$A = A + O_3$$

E) Exemples

E.1 Diagonalisation et trigonalisation pratiques pour une matrice de taille 2

Remarque 5.1.38: Expression explicite du polynôme caractéristique

On a pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$$

Méthode 5.1.39: Diagonaliser ou trigonaliser une matrice de taille 2

◁ Cas 1 : $\chi_A = (X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha \neq \beta$.
Dans ce cas, A est diagonalisable et on calcule les sous-espaces propres $E_\alpha(A)$ et $E_\beta(A)$

◁ Cas 2 : $\chi_A = (X-\alpha)^2$
- Soit $A = \alpha I_2$
- Soit A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable.
  On trouve un vecteur propre e_1 tel que $E_\alpha(A) = \mathrm{Vect}(e_1)$.
  On choisit ensuite $e_2 \notin E_\alpha(A)$ de sorte que (e_1, e_2) soit une base de E.

On considère $P = \mathrm{Mat}_{\mathrm{bc}}(e_1, e_2)$. Alors

$$P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{e_1,e_2}(u_A) = \begin{pmatrix} \alpha & \star \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Exercice 1

Traiter le cas des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

E.2 Diagonalisation et trigonalisation pratiques pour une matrice de taille 3

Méthode 5.1.40: Diagonaliser ou trigonaliser une matrice de taille 3

◁ Cas 1 : $\chi_A = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$, avec $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ Dans ce cas, A est diagonalisable et on trouve (e_1, e_2, e_3) base de vecteurs propres de A.

◁ Cas 2 : $\chi_A = (X-\alpha)(X-\beta)^2$

— Si $\dim E_\beta(A) = 2$, A est diagonalisable.

— Si $\dim E_\beta(A) = 1$, on trouve (e_1, e_2) tels que $\begin{cases} E_\alpha(A) = \mathrm{Vect}(e_1) \\ E_\beta(A) = \mathrm{Vect}(e_2) \end{cases}$
Pour cela on peut adopter différentes stratégies selon le type de matrice triangulaire souhaitée.

— On peut prendre e_3 sans condition supplémentaire, de sorte à ce que (e_1, e_2, e_3) soit libre. Dans ce cas, en notant $P = \mathrm{Mat}_{\mathrm{bc}}(e_1, e_2, e_3)$, on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \star \\ 0 & \beta & \star \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

— On peut aussi imposer une condition du type :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \star \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

On choisit alors $e_3 \in \mathrm{Ker}((A-\beta I_3)^2) \setminus \mathrm{Ker}(A-\beta I_3) = \mathrm{Ker}((A-\beta I_3)^2) \setminus \mathrm{Vect}(e_2)$. Il faut donc calculer $(A-\beta I_3)^2$.
Pour éviter cela, la méthode la plus simple est de résoudre $(A-\beta I_3)e_3 = e_2$.

◁ Cas 3 : $\chi_A = (X-\alpha)^3$, avec $A \neq \alpha I_3$. Ainsi A n'est pas diagonalisable.

— $\dim E_\alpha(A) = 2$. Alors $E_\alpha(A) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. On peut choisir e_3 de façon quelconque, ou ruser un peu.
Une technique commune consiste à d'abord choisir e_2, puis e_3 et enfin e_1.
En effet, comme $\mathrm{rg}(A-\alpha I_3) = 1$, on a $(A-\alpha I_3)^2 = O_3$ et donc $\mathrm{Im}(A-\alpha I_3) \subseteq \mathrm{Ker}(A-\alpha I_3)$.
On prend donc e_2 tel que $\mathrm{Vect}(e_2) = \mathrm{Im}(A-\alpha I_3)$.

Puis on prend e_3 tel que $(A-\alpha I_3)e_3 = e_2$.
Enfin on complète e_2 en (e_1, e_2) en base de $\mathrm{Ker}(A-\alpha I_3)$. De cette sorte, $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u_A - \alpha\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En conclusion :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

— $\dim E_\alpha(A) = 1$. Alors $(A-\alpha I_3)^3 \neq O_3$.
On choisit $e_3 \in \mathrm{Ker}(A-\alpha I_3)^2$. Puis on récupère e_1 et e_2 ainsi : $e_2 = (A-\alpha I_3)e_3$ et $e_1 = (A-\alpha I_3)e_2$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_e(u_A - \alpha\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Traiter les cas de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

E.3 Projecteurs et symétries

Proposition 5.1.41

Soit p un projecteur de E. On a

$$E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id})$$

et $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$.
p est diagonalisable.

Démonstration. $X^2 - X = X(X-1)$ annule p.

Proposition 5.1.42

Soit s une symétrie de E. On a

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$$

et $\mathrm{Sp}(p) = \{-1, 1\}$.
s est diagonalisable.

Démonstration. $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule s.

E.4 Endomorphismes nilpotents (complément) ⋆⋆⋆⋆

Lemme 5.1.43: Lemme de liberté

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit d l'indice de nilpotence de u. Soit $x \in E$, $u^{d-1}(x) \neq 0_E$. Alors $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est libre.

Démonstration. Soit $(\alpha_k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1} \in \mathbb{K}^d$ tel que $\sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j u^j(x) = 0_E$. Par l'absurde, supposons que les (α_j) ne sont pas tous nuls.

Soit alors $k = \min\{j \in [\![0\,, d-1]\!]\,, \alpha_j \neq 0\}$. Ainsi $\sum_{j=k}^{d-1} \alpha_j u^j(x) = 0_E$. En appliquant u^{d-1-k}, il vient :

$$0_E = \sum_{j=k}^{d-1} u^{j+d-1-k}(x) = \alpha_k \underbrace{u^{d-1}(x)}_{\neq 0}$$

d'où $\alpha_k = 0$ ce qui est absurde.

Lemme 5.1.44

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors son indice de nilpotence est inférieur à $n = \dim E$.

Démonstration. En utilisant le Lemme 5.1.43, on trouve $x \in E$ tel que $(x, \dots, u^{d-1}(x))$ soit libre. Alors $d \neq n$.

Théorème 5.1.45: Tout sur la réduction des nilpotents

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est nilpotent
- $\pi_u = X^d$ où $d \in [\![1\,, n]\!]$
- Il existe une base e de E telle que $\mathrm{Mat}_e(u)$ est triangulaire strictement supérieure
- u est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$
- χ_u est scindé et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$
- $\chi_u = X^n$

Proposition 5.1.46: Caractérisation des nilpotents par la trace des itérées

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors A est nilpotente.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les valeurs propres distinctes non-nulles de A, on note $m_1, \dots, m_d$ leur multiplicité.
Par l'absurde, si A n'est pas nilpotente, $d \geqslant 1$. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 = \mathrm{Tr}(A^k) = m_0 0^k + \sum_{j=1}^{d} m_j \lambda_j^k$$

Pour $k \in [\![1\,, d]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} \lambda_j^k m_j = 0$ *id est*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_d \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_d^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^d & \dots & \lambda_d^d \end{pmatrix}}_{=V} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix} = 0$$

avec $\det V = \lambda_1 \dots \lambda_d \times \mathrm{Vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \neq 0$ et $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Donc $\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix} = 0$, ce qui est exclu. Donc $d = 0$ et ainsi A est nilpotente.

E.5 Inversibilité de $P(u)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$ (complément) ⋆⋆

Montrer qu'un polynôme en une matrice ou un endomorphisme est inversible peut être parfois utile dans plusieurs exercices. Mais ce n'est évidemment pas toujours vrai.

Lemme 5.1.47

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, admettant un polynôme minimal π_u. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(u)$ est inversible *si et seulement si* P et π_u sont premiers entre eux. De plus, $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Démonstration. On a la relation de Bézout : on dispose de $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$,

$$UP + V\pi_u = 1$$

En spécifiant A,

$$U(u)P(u) + V(u)\pi_u(u) = \mathrm{id}_E$$

Mais $Q(u) = O_n$ donc :

$$V(u)P(u) = \mathrm{id}_E$$

Ainsi $P(u) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P(u)^{-1} = U(u) \in \mathbb{K}[u]$.
Si P et π_u ne sont pas premiers entre eux, $\pi_u = QD$ avec $D = P \wedge \pi_u$. On a $\pi_u \mid PQ$ donc $P(u)Q(u) = 0$ alors que $Q(u) \neq 0$ puisque $\deg Q < \deg \pi_u$. Par suite $P(u)$ n'est pas inversible.

Exemple 5.1.48: Application

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline O_n & A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que si M est diagonalisable, alors $A = 0$.

◁ Soit $P = \pi_M$ le polynôme minimal de M, scindé à racines simples qui annule M. Par récurrence rapide, pour $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \left(\begin{array}{c|c} A^k & kA^k \\ \hline O_n & A^k \end{array}\right)$. Ainsi :

$$O_{2n} = P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & AP'(A) \\ \hline O_n & P(A) \end{array}\right)$$

D'où $\begin{cases} P(A) & = O_n \\ AP'(A) & = O_n \end{cases}$ Ainsi A est diagonalisable.

◁ Mais P est scindé à racines simples donc P et P' n'ont pas de racine commune. Ainsi, $P'(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ d'après le lemme précédent. Donc $AP'(A) = O_n \Rightarrow A = O_n$.

II) Réduction simultanée

A) Codiagonalisation ⋆⋆⋆⋆

Théorème 5.2.1: Codiagonalisation de deux endomorphismes

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisables et qui commutent.
Alors u et v sont codiagonalisables, c'est-à-dire qu'ils admettent une base commune de vecteurs propres.

Démonstration. Comme u est diagonalisable, en notant $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ deux-à-deux distincts,

$$E = \bigoplus_{j=1}^{d} E_{\lambda_j}(u)$$

Comme $u \circ v = v \circ u$, chaque $E_{\lambda_j}(u)$ est stable par v. On note v_j l'endormorphisme induit par v sur $E_{\lambda_j}(u)$. Or v étant diagonalisable, v_j est diagonalisable.
On dispose ainsi d'une base b_j de $E_{\lambda_j}(u)$ formée de vecteurs propres de v_j donc de v. Ce sont également des vecteurs propres de u.
En concaténant les $(b_j)_j$, on obtient une base de vecteurs propres pour u et v.

La réciproque est également vraie car deux diagonalisables commutent toujours entre eux.

Théorème 5.2.2: Codiagonalisation de plusieurs endomorphismes

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes (éventuellement infinie) diagonalisables qui commutent entre eux deux-à-deux.
Alors les $(u_i)_i$ sont codiagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base e de E telle que :

$$\forall i \in I, \mathrm{Mat}_e(u_i) \text{ est diagonale.}$$

Démonstration. On procède par récurrence forte, sur la dimension de E.

- ◁ $\underline{n = 1}$: toutes les matrices sont diagonales.
- ◁ $\underline{n \to n+1}$: on suppose la propriété vraie pour les espaces de dimension $k \leqslant n+1$. On suppose $\dim E = n+1$ et $(u_i)_{i\in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ diagonalisables qui commutent.
  - — Si les u_i sont tous des homothéties, toutes les bases conviennent.
  - — Sinon, on dispose de $k \in I$ tel que u_k n'est pas une homothétie.

    Comme u_k est diagonalisable, $E = \bigoplus_{j=1}^{d} E_{\lambda_j}(u_k) = \bigoplus_{j=1}^{d} F_j$.

    Comme u_k n'est pas une homothétie, pour $j \in [\![1\,,d]\!]$, $\dim F_j \leqslant n$.

    Soit $j \in [\![1\,,d]\!]$. Pour tout $i \in I, u_k \circ u_i = u_i \circ u_k$, donc les F_j sont stables par u_i. On note u_{i,F_j} l'endomorphisme induit par u_i sur F_j. Les endomorphismes de la famille $(u_{i,F_j})_{i\in I} \in \mathcal{L}(F_j)^I$ sont tous diagonalisables et commutent deux-à-deux. On peut donc appliquer l'H.R. : on dispose d'une base b_j de F_j telle que :

    $$\forall i \in I, \mathrm{Mat}_{b_j}(u_{i,F_j}) \in \mathcal{D}_{\dim F_j}(\mathbb{K})$$

    Finalement, on concatène les bases $(b_j)_j$ en on obtient une base b de E. De plus pour tout $i \in I$,

    $$\mathrm{Mat}_b(u_i) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{b_1}(u_{i,F_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{Mat}_{b_d}(u_{i,F_d}) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{K})$$

B) Cotrigonalisation ⋆⋆⋆

Théorème 5.2.3: Cotrigonalisation de deux endomorphismes

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables qui commutent.
Alors u et v sont cotrigonalisables c'est-à-dire il existe une base e de E telle que $\mathrm{Mat}_e(u)$ et $\mathrm{Mat}_e(v)$ sont triangulaires supérieures.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension de l'espace.

- ◁ $\underline{\dim E = 1}$: toutes les matrices sont triangulaires.
- ◁ $\underline{n \to n+1}$: supposons la propriété vraie pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, u et v sont trigonalisables et commutent. On suppose $\dim E = n+1$, $u \circ v = v \circ u$ et u, v trigonalisables.

— *Recherche d'un vecteur propre commun* :
χ_u est scindé, donc on trouve $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Comme $u \circ v = v \circ u$, $E_\lambda(u)$ est stable par v. On considère $\tilde{v}$ l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$, il est encore trigonalisable. On dispose alors de x_1 un vecteur propre de v, mais aussi de u. D'où l'existence d'un vecteur propre commun.

— *On se ramène à l'H.R.* :
On complète x_1 en une base $b = (x_1, \dots, x_{n+1})$ de E. Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_b(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & \\ \vdots & U_1 \\ 0 & \end{pmatrix} = U$$

$$\text{et } \mathrm{Mat}_b(v) = \begin{pmatrix} \alpha & \star \\ 0 & \\ \vdots & V_1 \\ 0 & \end{pmatrix} = V, (U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$$

avec α la valeur propre associée à x_1 pour v.
Comme $u \circ v = v \circ u$, $UV = VU$ et donc par produit par blocs $U_1V_1 = V_1U_1$.
De plus, U_1 et V_1 sont trigonalisables car $\chi_U = (X - \lambda)X_{U_1}$.
On applique l'H.R. aux endormorphismes de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associés à U_1 et V_1. On dispose de $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, tel que $\begin{cases} P_1^{-1}U_1P_1 = T_1 \text{ triangulaire supérieure} \\ P_1^{-1}V_1P_1 = S_1 \text{ triangulaire supérieure} \end{cases}$

On définit $P = \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \\ \vdots & P_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$. On note e la base de E telle que $P = \mathrm{Mat}_b(e)$,

$$\mathrm{Mat}_e(u) = P^{-1}\mathrm{Mat}_b(u)P = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & \\ \vdots & P_1^{-1}U_1P_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ triangulaire supérieure}$$

D'où l'hérédité.

Théorème 5.2.4: Cotrigonalisation de plusieurs endomorphismes

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes (éventuellement infinie) trigonalisables qui commutent entre eux deux-à-deux.
Alors les $(u_i)_i$ sont cotrigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base e de E telle que :

$$\forall i \in I, \mathrm{Mat}_e(u_i) \text{ est triangulaire supérieure.}$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que $\mathrm{Vect}((u_i)_{i\in I}) \subseteq \mathcal{L}(E)$ qui est de dimension finie.
On extrait donc $u_{i_1}, \dots, u_{i_d}$ tels que $\mathrm{Vect}(u_{i_1}, \dots, u_{i_d}) = \mathrm{Vect}((u_i)_{i\in I})$. Il suffit donc de co-trigonaliser les $(u_{i_k})_{1\leqslant k\leqslant d}$, que l'on va noter $v_1, \dots, v_d$.

◁ On montre que les $v_1, \dots, v_d$ ont un vecteur propre commun : par récurrence sur d.
- Evident pour $d = 1$.
- Déjà fait pour $d = 2$.
- On suppose le résultat pour d endomorphismes trigonaliasbles qui commutent. On en prend $d+1$: $u_1, \dots, u_{d+1} \in \mathcal{L}(E)$.
  Comme u_{d+1} est trigonalisable, $\mathrm{Sp}(u_{d+1}) \neq \varnothing$. Soit donc $\mu \in \mathrm{Sp}(u_{d+1})$. Soit $F = E_\mu(u_{d+1})$, qui est stable par chaque u_j.
  Soit $\tilde{u_j}$ l'endormorphisme induit par u_j sur F : commes les $(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant d}$ sont tous trigonalisables, les $(\tilde{u_j})_{1 \leqslant j \leqslant d}$ le sont également, et commutent.
  Par H.R., les $(\tilde{u_j})$ ont un vecteur propre commun $x \in F$, qui est un vecteur propre de u_{d+1}.

◁ On montre la co-trigonalisabilité : par récurrence sur la dimension. C'est exactement la même démonstration que précédemment pour le Théorème 5.2.3.

III) Réduction de matrices particulières

A) Matrices de rang 1 ⋆⋆⋆

Lemme 5.3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Alors $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Démonstration. Comme A est de rang 1, on peut écrire :

$$A = CL, L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Ainsi : $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L$.
Mais $LC \in \mathbb{K}$ avec $LC = \sum_{k=1}^{n} [L]_{1,k}[C]_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \mathrm{Tr}(A)$.
Finalement : $A^2 = C(\mathrm{Tr}(A))L = \mathrm{Tr}(A)CL = \mathrm{Tr}(A)A$.

Proposition 5.3.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
1. A non diagonalisable
2. $A^2 = 0$
3. $\mathrm{Tr}(A) = 0$
4. $\mathrm{Im}\, A \subseteq \mathrm{Ker}\, A$

Démonstration. Le lemme précédent montre que (2) $\iff$ (3). De plus, (2) $\iff$ (4) est évident.
On montre (1) $\iff$ (3).
D'après le lemme, $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

◅ Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, A est nilpotente non-nulle donc non-diagonalisable.

◅ Sinon, $X(X - \mathrm{Tr}(A))$ scindé à racines simples annule A donc A est diagonalisable.

B) Matrices circulantes ⋆⋆

Définition 5.3.3: Matrice circulante

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A est circulante si elle s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ a_{n-2} & & \ddots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & & a_0 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.3.4

Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ a_{n-2} & & \ddots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & & a_0 \end{pmatrix}$.
Alors A est diagonalisable.
De plus, en notant $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}$, on a :

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{kj}, j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

et pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$E_{\omega^j}(M) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)j} \end{pmatrix}$$

Démonstration. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi que u_M son endomorphisme canoniquement associé : $u_M(e_n) = e_n$ et $u_M(e_j) = e_{j-1}$ pour $j \leqslant 2$.
Ainsi, $u_M^k : e_j \longmapsto e_{\overline{j-k}}$.

◅ On montre d'abord que M est diagonalisable.
On a $u_M^n = \mathrm{id}_E$ et $M^n = I_n$ d'où $X^n - 1$ est un polynôme scindé à racines simples qui annule M.

Ainsi M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) = \mathbb{U}_n$.
On cherche ensuite un vecteur propre associé à chaque ω^j, $j \in [\![0\,, n-1]\!]$.
Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} MX = \lambda X &\iff \begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ \dots & \dots \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ x_1 & = \lambda x_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall k \in [\![2\,, n]\!], x_k & = \lambda^k x_1 \\ x_1 & = \lambda^n x_1 \end{cases} \\ &\iff X \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \dots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où $E_{\omega^j}(M) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \dots \\ \omega^{(n-1)j} \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(Z_j)$. Soit ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathrm{bc}}(Z_0, \dots, Z_{n-1})$$

◁ Ensuite, $A = Q(M)$ avec $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_j X^j$. Donc :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} Q(1) & & & (0) \\ & Q(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & Q(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Et ainsi A est diagonalisable, et on a les résultats sur le spectre et les vecteurs propres.

C) Matrices compagnons ⋆⋆⋆

Dans toute cette partie, $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Définition 5.3.5

On appelle matrice compagnon associée à P :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Théorème 5.3.6

$$\chi_{C_P} = P$$

Tout polynôme unitaire de degré n est polynôme caractéristique d'une telle matrice.

Démonstration. On a :

$$\chi_{C_P} = \begin{vmatrix} X & & (0) & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & \vdots \\ (0) & & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière colonne :

$$\chi_{C_P} = \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+n+1}(-a_j)\det(M_{i,j}) + (X - a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & & & (0) \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & X \end{vmatrix}$$

avec

$$\det(M_{i,j}) = \begin{vmatrix} X & & & (0) & & & \\ -1 & \ddots & & & & 0_{n-j} & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ (0) & & -1 & X & & & \\ & & & & -1 & X & (0) \\ & 0_j & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & X \\ & & & & (0) & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} X & & & (0) \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & X \end{vmatrix}}_{j} \begin{vmatrix} -1 & X & & (0) \\ 0 & & \ddots & \\ & & & X \\ (0) & & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= X^j(-1)^{n-1-j}$$

Ainsi, $\chi_{C_P} = \sum_{j=0}^{n-2}(-1)^{j+n}a_jX^j(-1)^{n-1-j} + (X - a_{n-1})X^{n-1}$
Cela donne bien : $\chi_{C_P} = P$.

Proposition 5.3.7: Application

Soit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k \in \mathbb{Z}[X]$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines complexes de P.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. On considère $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On la trigonalise dans $\mathbb{C}$. Comme $\chi_{C_P} = P$,

$$C_P = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$C_P^k = Q \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Donc $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = \mathrm{Tr}(C_p^k) \in \mathbb{Z}$ car $C_P^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

IV) Endomorphismes cycliques ⋆⋆

On considère toujours E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$.

A) Polynôme minimal ponctuel

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $x_0 \in E$. Considérons :

$$\theta_{u,x_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(u)(x_0) \end{array} \right. \quad \text{linéaire non-injectif}$$

Définition 5.4.1: Existence du polynôme minimal ponctuel

$\mathrm{Ker}(\theta_{u,x_0})$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
Alors il existe π_{u,x_0} unitaire tel que $\pi_{u,x_0}\mathbb{K}[X] = \mathrm{Ker}(\theta_{u,x_0})$.

Démonstration. $\operatorname{Ker}\theta_{u,x_0}$ est un sous-groupe pour la loi additive, car c'est un sous-espace vectoriel.
Soit $P \in \operatorname{Ker}\theta_{u,x_0}$, et $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors,

$$\theta_{u,x_0}(QP) = (QP)(u)(x_0) = Q(u)(\underbrace{P(u)(x_0)}_{=0_E}) = 0_E$$

Donc $QP \in \operatorname{Ker}\theta_{u,x_0}$.

Par ailleurs, $\pi_u \in \operatorname{Ker}\theta_{u,x_0}$ donc $\pi_{u,x_0} \mid \pi_u$.

Proposition 5.4.2

Il existe $x_0 \in E$, $\pi_{u,x_0} = \pi_u$.

Démonstration. Notons $\pi_u = \prod_{j=1}^{d} P_j^{m_j}$ où $P_1, \dots, P_d$ sont deux-à-deux distincts. Par théorème des noyaux,

$$E = \bigoplus_{j=1}^{d} \underbrace{\operatorname{Ker}(P_j^{m_j}(u))}_{=E_j}$$

On a d'après le théorème des noyaux itérés (Théorème **4.6.5**), pour $j \in [\![1\,,d]\!]$, $\operatorname{Ker}(P_j^{m_j-1}(u)) \subseteq \operatorname{Ker}(P_j^{m_j}(u))$. De plus par minimalité de π_u, l'inclusion est stricte. En effet, par l'absurde si pour un k on a égalité, $P_k^{m_k-1}\prod_{j\neq k} P_j^{m_j}$ annule u, ce qui est exclu.
Ainsi, pour $j \in [\![1\,,d]\!]$, $\operatorname{Ker}(P_j^{m_j-1}(u)) \subsetneq \operatorname{Ker}(P_j^{m_j}(u))$. On peut donc considérer $x_j \in \operatorname{Ker}(P_j^{m_j}(u))\setminus \operatorname{Ker}(P_j^{m_j-1}(u))$. On pose :

$$x_0 = \sum_{j=1}^{d} x_j$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors,

$$\begin{aligned} P(u)(x_0) &\iff \sum_{j=1} \underbrace{P(u)(x_j)}_{\in E_j} = 0 \\ &\overset{\oplus}{\iff} \forall j \in [\![1\,,d]\!]\,, P(u)(x_j) = 0 \\ &\iff \forall j \in [\![1\,,d]\!]\,, \pi_{u,x_j} \mid P \end{aligned}$$

Or $P_j^{m_j}(u)(x_j) = 0$ d'où $\pi_{u,x_j} \mid P_j^{m_j}$. Comme $P_j^{m_j-1}(u)(x_j) \neq 0$, $P_j^{m_j-1}$ ne divise pas π_{u,x_j}. Donc $\pi_{u,x_j} = P_j^{m_j}$. Finalement,

$$P(u)(x_0) = 0_E \iff \forall j \in [\![1\,,d]\!]\,, P_j^{m_j} \mid P \iff \pi_u \mid P$$

Donc $\pi_{u,x_0} = \pi_u$.

Lemme 5.4.3: Espaces F_{x_0}

Soit pour $x_0 \in E$, $F_{x_0} = \{P(u)(x_0), P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathrm{Im}(\theta_{u,x_0})$ a pour base $(u^k(x_0))_{k\in[\![0,d-1]\!]}$ avec $d = \deg(\pi_{u,x_0})$.

Démonstration. On a $\mathbb{K}_{d-1}[X] \oplus \pi_{u,x_0}\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]$. Donc θ_{u,x_0} induit un isomorphisme entre $\mathrm{Im}(\theta_{u,x_0})$ et $\mathbb{K}_{d-1}[X]$.

B) Définition des cycliques

Définition 5.4.4: Définitions équivalentes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists x_0 \in E, F_{x_0} = E$
2. $\exists x_0 \in E, (x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E.
3. On dispose d'une base e de E, telle que $\mathrm{Mat}_e(u) = C_P$.

On dit dans ce cas que u est un endomorphisme cyclique.
On note $\Omega(E)$ l'ensemble des endomorphismes cycliques de E.

Démonstration. On a toujours $F_{x_0} \subseteq E$ qui est de dimension $\deg(\pi_{u,x_0})$.

◁ Premièrement,

$$\begin{aligned}(1) &\iff \exists x_0 \in E, \deg \pi_{u,x_0} = n = \dim E \\ &\iff \exists x_0 \in E, (x_0, \dots, u^{n-1}(x_0)) \text{ base de } F_{x_0} \\ &\iff \exists x_0 \in E, (x_0, \dots, u^{n-1}(x_0)) \text{ base de } E \\ &\iff (2)\end{aligned}$$

◁ (2) ⇒ (3) : On dispose de $e = (x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E.

Par définition, pour $k \leqslant n-2$, $\begin{cases} u(u^k(x_0)) & = u^{k+1}(x_0) \\ u(u^{n-1}(x_0)) & = u^n(x_0) \in E = \mathrm{Vect}\left(u^k(x_0)\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \end{cases}$

, d'où :

$$u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$$

On a alors :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = C_P$$

où $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ unitaire.

◅ (3) ⇒ (2) : Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, telle que $\mathrm{Mat}_e(u) = C_P$. On note $x_0 = e_1$. Alors pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_k) = e_{k+1} = u^k(x_0)$. Ainsi, $e = (x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

C) Polynôme minimal d'un cyclique, théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 5.4.5: Polynôme minimal d'un cyclique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors,

$$u \in \Omega(E) \iff \pi_u = \chi_u$$

Démonstration. ◅ ⇒ : Soit $u \in \Omega(E)$. On considère donc $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ une base de E.
Montrons que $\deg(\pi_u) \geqslant n$, et pour cela montrons que $(\mathrm{id}_E, \dots, u^{n-1})$ est libre.
Soit $(\alpha_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]} \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

A fortiori, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k(x_0) = 0_E$.
Par liberté de e, les (α_k) sont tous nuls. De plus, comme $u^n(x_0) \in E$, on a :

$$u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x_0) (\star)$$

dont $\mathrm{Mat}_e(u) = C_P$ où $P = X^n - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\chi_u = \chi_{C_P} = P$ d'après le Théorème 5.3.6.
Deux possibilités à partir d'ici :

- Par Cayley-Hamilton, $\pi_u \mid \chi_u$ donc $\deg(\pi_u) \leqslant n$. Finalement, $\deg(\pi_u) = n = \deg(\chi_u)$. Etant tous deux unitaires, $\pi_u = \chi_u$.
- Mais on peut se dispenser de Cayley-Hamilton (en effet une démonstration de Cayley-Hamilton repose sur le théorème que nous sommes en train de démontrer). On montre donc $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
  Par $(\star)$, $P(u)(x_0) = 0$. De plus, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(u)(u^k(x_0)) = u^k \circ P(u)(x_0) = 0_E$. Ainsi $P(u)$ s'annule sur une base de E. Ainsi $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $\pi_u = \chi_u$.

◅ ⇐ : Supposons que $\deg(\chi_u) = \deg(\pi_u)$. Alors, d'après la Proposition 5.4.2, on trouve $x_0 \in E$ tel que $\pi_{u,x_0} = \pi_u$.
Ainsi, $\deg(\pi_{u,x_0}) = n$ et $\dim(F_{x_0}) = n$. Ainsi, $E = \mathrm{Vect}\left(u^k(x_0)\right)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$.
Ainsi, u est cyclique.

Nous pouvons donc proposer une **démonstration du théorème de Cayley-Hamilton** :

Démonstration. Soit $x_0 \in E\setminus\{0\}$. On souhaite montrer que $\chi(u)(x_0) = 0_E$.
On considère $F_{x_0} = \text{Vect}\left(u^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}} = \{P(u)(x_0), P \in \mathbb{K}[X]\}$ sous-espace vectoriel de E stable par u. On induit, en considérant :

$$\tilde{u} : \left\{ \begin{array}{ccc} F_{x_0} & \longrightarrow & F_{x_0} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

On remarque que $\tilde{u}$ est cyclique ; en effet $F_{x_0} = \text{Vect}\left(u^k(x_0)\right) = \text{Vect}\left(\tilde{u}^k(x_0)\right)$. D'où $\pi_{\tilde{u}} = \chi_{\tilde{u}}$.

- ◅ D'une part, $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$ donc $\chi_u = Q\chi_{\tilde{u}}$.
- ◅ D'autre part, $\chi_{\tilde{u}}(u)(x_0) = \pi_{\tilde{u}}(u)(x_0) = \pi_{\tilde{u}}(\tilde{u})(x_0) = 0_E$.

Finalement, vue cette égalité,

$$\chi_u(u)(x_0) = Q(u) \circ \chi_{\tilde{u}}(u)(x_0) = 0_E$$

D) Endomorphismes cycliques particuliers

Proposition 5.4.6: Espaces propres

Soit $u \in \Omega(E)$. Alors pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$,

$$\dim E_\lambda(u) = 1$$

Démonstration. Dans une base e de vecteurs propres de u,

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\text{Mat}_e(u - \lambda\text{id}) = \begin{pmatrix} -\lambda & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -\lambda & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang $\geqslant n-1$. En effet, la matrice extraite $\begin{pmatrix} -\lambda & & (0) \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & -\lambda \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. Ainsi, $\dim\text{Ker}(u - \lambda\text{id}) \leqslant 1$ donc $\dim E_\lambda(u) = 1$.

D.1 Diagonalisables

Proposition 5.4.7: Deux caractérisations des diagonalisables

- ◅ Soit $u \in \Omega(E)$. Alors, u est diagonalisable *si et seulement si* χ_u est scindé à racines simples.
- ◅ Soit u diagonalisable. Alors u est cyclique *si et seulement si* χ_u est scindé à racines simples.

Démonstration. ◅ Pour le premier point, c'est un corollaire immédiat de la proposition précédente.

◅ Pour le second, notons $\pi_u = \prod_{j=1}^{d}(X - \alpha_j)$ où les (α_j) sont les valeurs propres sans multiplicité de u.

— $\Rightarrow$: Si u est cyclique, $\pi_u = \chi_u$ scindé à racines simples.

— $\Leftarrow$: Supposons que χ_u est scindé à racines simples. Alors, u a n valeurs propres distinctes. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ una base de vecteurs propres de E. Alors,

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec les (λ_i) deux-à-deux distincts. Posons $x_0 = \sum_{j=1}^{n} e_j$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_e\left(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0)\right) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

qui est inversible. Ainsi, $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E, et donc u est cyclique.

D.2 Nilpotents

Proposition 5.4.8: Caractérisation des nilpotents

Soit u un endomorphisme nilpotent. Alors, $u \in \Omega(E)$ *si et seulement si* son indice de nilpotence est égal à n.

Démonstration. ◅ $\Rightarrow$: Si u est cyclique, $\pi_u = \chi_u$ donc $\pi_u = X^n$ et l'ordre de nilpotence est bien n.

◅ $\Leftarrow$: Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. Alors, comme vu précédemment, $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre de cardinal n, c'est donc une base de E. Ainsi u est cyclique.

E) Induit d'un cyclique

Théorème 5.4.9: L'induit d'un cyclique est cyclique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Soit F sous-espace vectoriel stable par u.
On considère $\tilde{u} = u_{|F}$. Alors $\tilde{u}$ est cyclique.

Démonstration. Soit $x_0 \in E$, et $F_{x_0} = \text{Vect}\left(u^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Posons :

$$I_F = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x_0) \in F\} \neq \{0\}$$

C'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$:

- ◅ C'est un sous-espace vectoriel donc un sous-groupe pour la loi additive.
- ◅ Si $P \in I_F$, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $QP(u)(x_0) = Q(u)\left(\underbrace{P(u)(x_0)}_{\in F}\right) \in F$.

On dispose donc, comme $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal, on trouve $Q_F \in \mathbb{K}[X]$ unitaire,

$$I_F = (Q_F) = Q_F\mathbb{K}[X]$$

On pose alors $y_0 = Q_F(u)(x_0)$. Pour tout $x \in F$, on dispose de $P \in \mathbb{K}[X]$, $x = P(u)(x_0)$.
Comme $x \in F$, $P \in I_F$ et $P = Q_F R$, alors :

$$x = P(u)(x_0) = R(u)\left(Q_F(u)(x_0)\right) = R(u)(y_0)$$

Donc $F = \text{Vect}\left(u^k(y_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

On peut même montrer qu'il existe une correspondance bijective entre les sous-espaces stables par u et les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ contenant π_u. On montre alors qu'un cyclique admet un nombre fini de sous-espaces stables. La réciproque est vraie également ! Ce sera vu au Théorème 5.5.14.

F) Commutant d'un cyclique

Proposition 5.4.10: Commutant d'un cyclique

Soit $u \in \Omega(E)$. Alors, $\text{Com}(u) = \mathbb{K}[u]$.

Démonstration. Tout polynôme en u commute avec u. Réciproquement soit $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
Soit $v \in \text{Com}(u)$. Comme $v(x_0) \in E$, on a :

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$$

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $v(u^k(x_0)) = u^k(v(x_0))$ car $u \circ v = v \circ u$. Ainsi,

$$u^k\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j u^j(x_0)\right) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{j+k}(x_0)$$

En posant $w = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^j$, on a pour $k \in [\![0\,, n-1]\!]$,

$$w\left(u^k(x_0)\right) = v\left(u^k(x_0)\right)$$

Donc v et w coïncident sur une base de $\mathbb{K}[u]$. Ainsi $v = w \in \mathbb{K}[u]$.

G) Propriétés de $\Omega(E)$

Théorème 5.4.11

$\Omega(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. De plus si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\Omega(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. ◁ Ouvert : Posons $\varphi_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & \det(x, \ldots, u^{n-1}(x)) \end{array} \right.$ continue. Ainsi, $\varphi_x^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est ouvert. Donc $\Omega(E) = \bigcup_{x \in E} \varphi_x^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est ouvert.

◁ Dense : On le montre avec des matrices. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors M est trigonalisable, $M = PTP^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Soit $\delta = \min\{|\lambda_i - \lambda_j|\,, (i,j) \in [\![1\,, n]\!]^2\,, \lambda_i \neq \lambda_j\}$ (on prend $\delta = 1$ si il n'y a qu'une seule valeur propre). Alors $\delta > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\delta}{2}$. Pour tout $k \geqslant n_0$ considérons :

$$M_k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \dfrac{1}{k} & & & (t_{ij}) \\ & \lambda_2 + \dfrac{1}{2k} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n + \dfrac{1}{nk} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Montrons que l'endomorphisme u_k canoniquement associé à M_k est cyclique. On montre que les coefficients diagonaux de M_k sont deux-à-deux distincts. Soient $i \neq j$.

— Si $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i + \dfrac{1}{ik} \neq \lambda_j + \dfrac{1}{jk}$.

— Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, $|\lambda_i - \lambda_j| \geqslant \delta$. Or $\left|\dfrac{1}{ik} - \dfrac{1}{jk}\right| \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{\delta}{2}$. D'où $\lambda_i + \dfrac{1}{ik} \neq \lambda_j + \dfrac{1}{jk}$.

De plus, on a bien $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \dfrac{1}{k} & & & (t_{ij}) \\ & \lambda_2 + \dfrac{1}{2k} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n + \dfrac{1}{nk} \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to +\infty]{} T$. Donc par continuité de l'application $A \mapsto PAP^{-1}$, on a :

$$M_k = PT_kP^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} PTP^{-1} = M$$

Ainsi si u est canoniquement associé à M, on a $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} u$ et $(u_k)_{k\geqslant n_0} \in \Omega(E)^{\mathbb{N}}$.

V) Applications diverses

A) Résolution d'équations matricielles ⋆⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On cherche à résoudre $P(M) = A$.

Lemme 5.5.1

Soit M une solution de $P(M) = A$. Alors $AM = MA$.

Démonstration. En effet, $P(M)M = MP(M)$.
Donc M laisse stables les sous-espace propres de A, et même tous les $\mathrm{Ker}(Q(A))$.

Méthode 5.5.2: Résolution d'équations matricielles

Toujours procéder par **analyse-synthèse**.

- ◁ χ_A est scindé à racines simples : $\chi_A = \prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j)$
  Alors A est diagonalisable, et M laisse stable chaque $E_{\lambda_i}(A)$ de dimension 1.
  Ainsi :
  $$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
  $$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$
  Réciproquement si $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$, M est solution de $P(M) = A$ *si et seulement si* : $\forall j \in [\![1,n]\!], P(\mu_j) = \lambda_j$.
- ◁ χ_A est scindé et A est diagonalisable : dans ce cas, M laisse stable chaque $E_{\lambda_j}(A)$ et on procède de même par blocs.
- ◁ Sinon, on peut utiliser un polynôme annulateur de A. Si $Q(A) = 0$, alors $(QP)(M) = 0$. Si QP est scindé à racines simples, on peut diagonaliser M.

Exemple 5.5.3: u^2 diagonalisable $\Rightarrow$ u diagonalisable

Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On suppose que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable.

◁ Soit $Q = \pi_{u^2}$ scindé à racines simples. Notons $Q = \prod_{j=1}^{m}(X - \lambda_j)$ avec les λ_j deux-à-deux distincts.
Comme $Q(u^2) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $Q(X^2)$ annule u.

◁ Or $Q(X^2) = \prod_{j=1}^{m}(X-\lambda_j) = \prod_{j=1}^{m}(X-\delta_j)(X+\delta_j)$ si $\delta_j^2 = \lambda_j$. Ainsi $P = Q(X^2)$ est scindé à racines simples et annule u. Donc u est diagonalisable.

Exemple 5.5.4: Deux équations matricielles

Résoudre $M^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

◁ On sait que M et A commutent. Donc M laisse stable $E_1(A)$ et $E_5(A)$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & a \\ 0 & \beta & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. En outre, M laisse stable $\mathrm{Ker}((A-5I_3)^2)$ donc $a = 0$.

◁ Réciproquement, si $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & b(\beta+c) \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ Donc :

$$M^2 = A \iff \begin{cases} \alpha^2 & = 1 \\ \beta^2 & = 5 \\ c^2 & = 5 \\ b(\beta+c) & = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha & = \varepsilon_1 \in \{\pm 1\} \\ \beta & = \varepsilon_2\sqrt{5}, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\} \\ c & = \varepsilon_3\sqrt{5}, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\} \\ b(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\sqrt{5} & = 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha & = \varepsilon_1 \\ \beta & = \varepsilon_2\sqrt{5} \\ c & = \varepsilon_2\sqrt{5} \\ 2b(\varepsilon_2\sqrt{5} & = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha & = \varepsilon_1 \\ \beta & = \varepsilon_2\sqrt{5} \\ c & = \varepsilon_2\sqrt{5} \\ b & = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\varepsilon_2 \end{cases}$$

◁ D'où l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{5} & \dfrac{2}{\sqrt{5}}\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\sqrt{5} \end{pmatrix}, (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{\pm 1\}^2 \right\}$$

Résoudre l'équation $X^2 - 2X = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

◁ $\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$. A est diagonalisable.
X laisse stable $E_3(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

◁ On a : $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. X est donc de la forme $P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}$. Ainsi :

$$X \in \mathcal{S} \iff \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha &= 3 \\ \beta^2 - 2\beta &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \in \{-1, 3\} \\ \beta = 1 \end{cases}$$

◁ Ainsi

$$\mathcal{S} = \left\{ P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \right\}$$

Et après calculs :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

B) Calculs de puissances ⋆⋆⋆

B.1 Cas diagonalisable

Proposition 5.5.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Alors on dispose de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, tels que $A = PDP^{-1}$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Démonstration. Par récurrence rapide.

B.2 Avec un polynôme annulateur de petit degré

Méthode 5.5.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}_d[X]$ tel que $P(A) = 0$.
Pour $k \geqslant d$, on écrit la division euclidienne de X^k par P : $X^k = QP + R$ où $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
Alors $A^k = R(A)$.

B.3 Cas trigonalisable

On effectue le calcul blocs par blocs, en utilisant éventuellement le binôme de Newton.

C) Remarques sur les sous-espaces stables

C.1 Existence de droites ou plans stables dans $\mathbb{R}$ ⋆⋆⋆

Proposition 5.5.7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Alors E admet un sous-espace stable par u qui est une droite ou un plan.

Démonstration. L'idée est que les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 sans racine réelle.

- ◁ π_u admet une racine réelle λ. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Soit x un vecteur propre associé. Alors $\mathrm{Vect}(x)$ convient.
- ◁ Sinon, π_u a un diviseur irréductible $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2.
  Notons que $P(u) \in \mathrm{GL}(E)$ (en effet si $\pi_u = PQ$, on a $P(u) \circ Q(u) = 0$ donc $Q(u) = 0$ ce qui contredit la minimalité de π_u).
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u)) \setminus \{0\}$. Alors $F_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable. En effet si $P = X^2 + aX + b$, $u^2(x) = -au(x) - bx$ et $u(x) \notin \mathrm{Vect}(x)$ (car par l'absurde si $u(x) = \lambda x$, on aurait $P(\lambda) = 0$, impossible car P irréductible).

C.2 Hyperplans stables ⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé.

Proposition 5.5.8

Soit H un hyperplan. Alors $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ où $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ X & \longmapsto & LX \end{array} \right.$$

Alors, H est stable par A *si et seulement si* $L^\top$ est vecteur propre de $A^\top$.

Démonstration. H hyperplan stable par A s'écrit : $\forall X \in H, AX \in H$ ce qui équivaut à : $\forall X \in \mathbb{K}^n, LX = 0 \Rightarrow (LA)X = 0$.
Soit $H_0 = \{X \in \mathbb{K}^n, (LA)X = 0\}$.

$$\begin{aligned} H \text{ stable par } A &\iff H \subseteq H_0 \\ &\iff \mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi \text{ où } \psi : X \mapsto LAX \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \psi = \lambda\phi \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, LA = \lambda L \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, A^\top L^\top = \lambda L^\top \end{aligned}$$

C.3 Sous-espaces stables des diagonalisables ⋆⋆

Proposition 5.5.9: Caractérisation des sous-espaces stables

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. Les sous-espaces stables de u sont les $\bigoplus_{j=1}^{d} F_j$ où chaque F_j est un sous-espaces vectoriel de $E_{\lambda_j}(u)$.

Démonstration. On a $E = \bigoplus_{j=1}^{d} E_{\lambda_j}(u)$ et $\pi_u = \prod_{j=1}^{d}(X - \lambda_j)$.
Soit F un sous-espace de E stable par u, et $\tilde{u}$ l'induit de u sur F. On a $\pi_u(\tilde{u}) = 0_{\mathcal{L}(F)}$ donc par le théorème des noyaux,

$$F = \bigoplus_{j=1}^{d} \operatorname{Ker}(\tilde{u} - \lambda_j \mathrm{id}_F) = \bigoplus_{j=1}^{d} (E_{\lambda_j}(u) \cap F)$$

Donc F s'écrit bien de la forme souhaitée. Réciproquement, un tel sous-espace est bien stable par u.

Proposition 5.5.10: Existence d'un supplémentaire stable

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. Alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.

Démonstration. Soit F sous-espace vectoriel de E. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ base de F.
Soit $(w_1, \dots, w_n)$ base de vecteurs propres de E, comme u diagonalisable.
Comme $(e_1, \dots, e_d)$ libre et $(w_1, \dots, w_n)$ génératrice, on dispose par théorème de la base incomplète de $i_1, \dots, i_q$ tel que $(e_1, \dots, e_d, w_{i_1}, \dots w_{i_q})$ base de E.
On pose $G = \operatorname{Vect}(w_{i_1}, \dots, w_{i_q})$. Alors, $F \oplus G = E$ et $u(G) \subseteq G$.

C.4 Sous-espaces stables des nilpotents ⋆

Soit $n = \dim E$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre n.

Lemme 5.5.11

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{Ker}(u^k)$ stable par u.
De plus, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker}(u^k) = k$.

Démonstration. $u(\operatorname{Ker}(u^k)) \subseteq \operatorname{Ker}(u^k)$ se vérifie simplement.
Alors $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(u) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(u^{n-1}) \subsetneq \operatorname{Ker}(u^n) \subsetneq E$. Ainsi $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker}(u^k) = k$.

Proposition 5.5.12

Les $(\mathrm{Ker}(u^k))_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont les seuls sous-espaces stables de E par u.

Démonstration. Soit F sous-espace stable par u de dimension d.
Soit $\tilde{u} = u_{|F}$. Alors $\tilde{u}^n = 0_{\mathcal{L}(F)}$. Donc $\tilde{u}$ nilpotent.
Ainsi $\tilde{u}^d = O_{\mathcal{L}(F)}$. Donc $F \subseteq \mathrm{Ker}(u^d)$. Par égalité des dimensions,

$$F = \mathrm{Ker}(u^d)$$

C.5 Sous-espaces stables des cycliques ⋆

Lemme 5.5.13

Soit $u \in \Omega(E)$. Notons $\mathcal{S}(u)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels stables par u, et $\mathcal{I}(u)$ l'ensemble des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ contenant π_u. Alors $\mathcal{S}(u)$ est en bijection avec $\mathcal{I}(u)$.

Démonstration. On conjecture que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(u) & \longrightarrow & \mathcal{I}(u) \\ F & \longmapsto & \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x_0) \in F\} \end{array} \right.$.

- ◁ Injectivité : Soient F et G stables par u, tels que $\varphi(F) = \varphi(G)$.
  Montrons que $F \subseteq G$. Soit $x \in F$. Comme u est cyclique, $x = P(u)(x_0)$, pour $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P \in \varphi(F) = \varphi(G)$. Donc $x = P(u)(x_0) \in G$.
  De même, $G \subseteq F$ et $F = G$.
- ◁ Surjectivité : Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$ contenant π_u. Soit $F = \{P(u)(x_0), P \in I\}$.
  Montrons que $\varphi(F) = I$.
  - Montrons déjà que $F \in \mathcal{S}(u)$. F est un sous-espace vectoriel car I est un idéal donc un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$. De plus, si $x \in F$, $x = P(u)(x_0)$ pour un certain $P \in I$. Donc $u(x) = (XP)(u)(x_0) \in F$.
  - Montrons que $\varphi(F) \subseteq I$. Soit $P \in \varphi(F)$. Alors $P(u)(x_0) \in F$. Donc on trouve $Q \in I$, $P(u)(x_0) = Q(u)(x_0)$. Ainsi, $\pi_{u,x_0} \mid P - Q$. Or, $\pi_{u,x_0} = \pi_u$ donc $P - Q = \pi_u R$.
    Ainsi, $P = Q + \pi_u R \in I$.
  - De plus $I \subseteq \varphi(F)$ de façon évidente.

Théorème 5.5.14: Caractérisation des cycliques par les sous-espaces stables

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- ◁ Si $u \in \Omega(E)$, u a un nombre fini de sous-espaces stables.
- ◁ Réciproquement, si u a un nombre fini de sous-espaces stables et que $\mathbb{K}$ est

un corps infini, $u \in \Omega(E)$.

Démonstration. $\lhd$ $\underline{\Rightarrow}$: L'ensemble $\mathcal{I}(u)$ introduit au lemme précédent est fini. En effet, il n'y a qu'un nombre fini de diviseurs unitaires de π_u. Comme $\mathcal{I}(u)$ et $\mathcal{S}(u)$ sont en bijection, ils ont le même cardinal fini, et donc u admet un nombre fini de sous-espaces stables.

$\lhd$ $\underline{\Leftarrow}$: Pour tout $x_0 \in E$, F_{x_0} est stable par u. Donc :

$$\forall x_0 \in E, F_{x_0} \in \mathcal{S}(u) \text{ fini}$$

Ainsi $\{F_{x_0}, x_0 \in E\}$ est fini. Notons alors $\{F_{x_0}, x_0 \in E\} = \{F_j, j \in [\![1, N]\!]\}$. Remarquons que :

$$E = \bigcup_{x_0 \in E} \{x_0\} \subseteq \bigcup_{x_0 \in E} F_{x_0} = \bigcup_{j=1}^{N} F_j$$

Avec les (F_j) des sous-espaces vectoriels. D'après le Lemme **4.7.1**, comme $\mathbb{K}$ est infini, on dispose d'un $k \in [\![1, d]\!]$, $E = F_d$.
Autrement dit, on dispose d'un $x_0 \in E$, tel que $E = F_{x_0}$. Ainsi $u \in \Omega(E)$.

D) Intersection de spectres ⋆⋆

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Lemme 5.5.15

Soit $\varphi : M \longmapsto AM - MB$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$
2. $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
3. φ est injective
4. φ est bijective

Démonstration. $\lhd$ $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: $\chi_A = \prod_{j=1}^{n}(X - \lambda_j)$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.
Or $\forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j \notin \mathrm{Sp}(B)$ et $B - \lambda_j I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
D'où $\chi_A(B) = \prod_{j=1}^{n}(B - \lambda_j I_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

$\lhd$ $\underline{(2) \Rightarrow (3)}$: Soit $M \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Alors $AM = MB$. Par récurrence rapide, $\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = MB^k$. Donc par combinaison linéiare, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(A)M = MP(B)$$

Avec $P = \chi_A$, $\chi_A(A) = 0$, ainsi pour $0 = M \underbrace{\chi_A(B)}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$ d'où $M = 0$ et φ injective.

$\lhd$ $\underline{(3) \Rightarrow (4)}$: $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ où $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension finie.

◁ $\underline{(4) \Rightarrow (1)}$: On suppose $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \varnothing$ par contraposée. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$.
Soit $X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ tel que $AX = \lambda X$. Comme $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(B^\top)$, soit $Y \neq O_{\mathbb{K}^n}$, $B^\top Y = \lambda Y$.
On considère $M = XY^\top \neq 0$.
$\varphi(M) = AM - MB = (AX)Y^\top - X\underbrace{(Y^\top B)}_{=(\lambda Y)^\top} = \lambda M - \lambda M = 0$.
Ainsi φ non-injective donc $\varphi \notin \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.

On en déduit la proposition suivante, c'est par ailleurs comme cela que l'exercice est posé habituellement :

Proposition 5.5.16

$\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing \iff M \mapsto AM - MB$ bijective.

Proposition 5.5.17

S'il existe C de rang r telle que $\varphi(C) = 0$ *id est* $AC = CB$, $\deg(\chi_A \wedge \chi_B) \geqslant r$.

Démonstration. ◁ $\underline{C = J_r}$: on procède par blocs.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$$

$$AC = CB \iff \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A_1 = B_1 \\ A_2 = 0 \\ B_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_4}$ et $\chi_B = \chi_{B_1}\chi_{B_4} = \chi_{A_1}\chi_{B_4}$ car $A_1 = B_1$ et $\chi_{A_1} \mid \chi_A \wedge \chi_B$ et $\deg(\chi_{A_1}) = r$.

◁ $\underline{\text{Cas général}}$: $C = PJ_rQ$ avec $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
$AC = CB \iff (AP)J_rQ = PJ_r(QB) \iff (P^{-1}AP)J_r = J_r(QBQ^{-1})$.
Par le premier cas $\deg(\chi_{P^{-1}AP} \wedge \chi_{QBQ^{-1}}) \geqslant r$ soit $\deg(\chi_A \wedge \chi_B) \geqslant r$.

Ainsi pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A et B ont donc au moins r valeurs propres communes comptées avec multiplicité.

Chapitre 6

Topologie des espaces vectoriels normés

Durant tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Normes, convergence et distance

A) Normes classiques

A.1 Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. ⋆⋆⋆⋆

Rappel 6.1.1: Définition des trois normes

On définit sur $\mathbb{K}^n$:

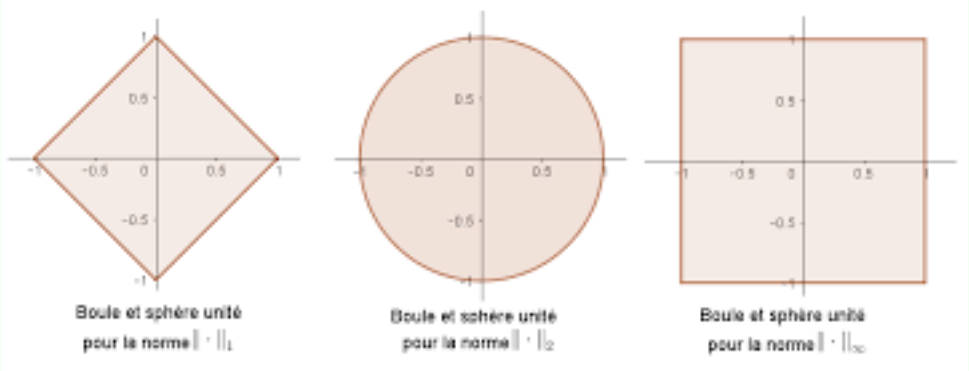
$$\triangleleft\ \|\cdot\|_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \end{array} \right.$$

$$\triangleleft\ \|\cdot\|_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \end{array} \right.$$

$$\triangleleft\ \|\cdot\|_\infty : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \end{array} \right.$$

Proposition 6.1.2: Boules dans $\mathbb{R}^2$

Représentation de $B(0,1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.



Ces boules unités sont une manière de prouver géométriquement que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne proviennent pas d'un produit scalaire, car leur boules unité ne sont pas strictement convexes et ne vérifient donc pas le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire (IT).

Remarque 6.1.3: La convergence d'une suite dépend de la norme considérée en dimension infinie

On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ où $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $f_n : t \longrightarrow t^n$.

- $\|f_n - 0\|_1 = \displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (f_n) tend vers 0 pour la norme 1.
- $\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = 1$ ne tend pas vers 0. En réalité, (f_n) n'admet pas de limite. Si f_n tend vers g pour $\|\cdot\|_\infty$,
  $\underbrace{\|f_n - g\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \geqslant \displaystyle\int_0^1 |f_n - g| = \|f_n - g\|_1$ donc $\|f_n - g\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par unicité de la limite, $g = 0$ ce qui est exclu.

Exemple 6.1.4: Comparaison des normes

Il s'agit de trouver les constantes optimales telles que :

$$\forall x \in E, \|x\|_i \leqslant \alpha_{ij} \|x\|_j \text{ où } i,j \in \{1,2,\infty\}$$

- Par Cauchy-Schwarz, $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$ atteint pour $x \propto \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$.
- La sommes des carrés est inférieure au carré de la somme donc $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$, atteint pour $x = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$.
- Clairement, $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ et $\|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$.
- $\|x\|_\infty = \left(\|x\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2$.

◅ $\|x\|_2 \leqslant (n\|x\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$

L'exemple précédent montre que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Comme vous le savez, c'est toujours vrai dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

A.2 Inégalités de Hölder et Minkowski, norme $\|\cdot\|_p$ ⋆⋆⋆

Lemme 6.1.5: Inégalité de Hölder

Soit $p > 1$ et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2, \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration. On a par concavité du ln,

$$\ln\left(\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\right) \geqslant \frac{\ln(u^p)}{p} + \frac{\ln(v^q)}{q} = \ln(uv)$$

puis par croissance,

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Donc en sommant,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{q}$$

◅ Cas 1 : $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = \sum_{i=1}^n |y_i|^q = 1$.
Alors, $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

◅ Cas 2 : $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \neq 0$ et $\sum_{i=1}^n |y_i|^q \neq 0$.
On pose alors pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$x_i' = \frac{x_i}{(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}} \text{ et } x_i' = \frac{y_i}{(\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}}$$

Alors $\sum_{i=1}^n |x_i' y_i'| = \dfrac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}} \leqslant 1$ et on conclut.

Théorème 6.1.6

La norme $\|\cdot\|_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right.$ est une norme.

Démonstration. ◁ Homogénéité : l'écrire.

◁ IT : C'est l'**inégalité de Minkowski**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\overset{\text{IT}}{\leqslant} \sum_{i=1}^n |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

◁ Séparation : l'écrire.

B) Compléments techniques sur l'adhérence et l'intérieur

B.1 Union et intersection

Lemme 6.1.7

◁ $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$.
◁ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
◁ $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
◁ $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subsetneq \overset{\circ}{A \cup B}$.

Démonstration. Utiliser le fait que $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Pour montrer qu'il n'y a pas égalité, penser à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$.

B.2 Empilements

Proposition 6.1.8

Soit $A \subseteq E$. En prenant sucessivement l'adhérence et l'intérieur de A, on peut obtenir 7 parties distinctes.

Démonstration. ◁ On a toujours $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

On a $\overset{\circ}{A} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$ d'où $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$. De plus, $\overset{\circ}{A} \subseteq \overline{A}$ d'où $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$.

◁ De même, $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$. On a $\overset{\circ}{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$ d'où $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

De plus $\overset{\circ}{A} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$ d'où $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ et $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}}$.

◁ Pour un A donné, on a donc au plus 7 parties distinctes :

$$A,\ \overset{\circ}{A},\ \overline{A},\ \overline{\overset{\circ}{A}},\ \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}},\ \overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} \text{ et } \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}}$$

◁ Trouvons un A qui convient : $A = [0\,,1] \cap \mathbb{Q} \cup \{2\} \cup\,]3\,,4[\cup\,]4\,,5[$. On a :

- $\overline{A} = [0\,,1] \cup \{2\} \cup [3\,,5]$
- $\overset{\circ}{\overline{A}} =]0\,,1[\cup\,]3\,,5[$.
- $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} = [0\,,1] \cup [3\,,5]$.
- $\overset{\circ}{A} =]3\,,4[\cup\,]4\,,5[$.
- $\overline{\overset{\circ}{A}} = [3\,,5]$.
- $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} =]3\,,5[$.

C) Densités ⋆⋆⋆

Rappel 6.1.9: $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

◁ $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

◁ $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. ◁ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on cherche à trouver $r \in \mathbb{Q}$, tel que $a < r < b$. Posons $q = \lfloor \frac{1}{b-a} \rfloor + 1$. L'intervalle $]qa\,, qb[$ est de longueur $q(b-a) > 1$ donc il contient un entier $p \in \mathbb{N}$. Posons $r = \frac{p}{q}$. Cela fournit :

$$qa < p < qb \text{ donc } a < r < b$$

◅ Pour $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, par translation $\sqrt{2}+\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Mais $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ (preuve à connaître), donc $\sqrt{2}+\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ d'où la densité de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 6.1.10: Sous-groupes de $\mathbb{R}$

Tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a\in\mathbb{R}_+^*$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$, différent de $\mathbb{R}$ et de $\{0\}$. On considère :

$$a=\inf\left\{x\in G\cap\mathbb{R}_+^*\right\}$$

En effet $G\cap\mathbb{R}_+^*$ est minoré par 0 et non-vide (car G est non réduit à $\{0\}$ et est stable par symétrique).

◅ Si $a=0$: Montrons alors que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $y\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$. Par caractérisation de la borne inférieure, on trouve $x\in G$ tel que

$$a=0<x<\varepsilon$$

De plus en posant $n=\lfloor\frac{y}{x}\rfloor$,

$$nx\leqslant y<(n+1)x$$

Alors,

$$0\leqslant y-nx<x<\varepsilon$$

Or $g=nx\in G$ donc $0<y-g<\varepsilon$ ce qui conclut.

◅ Si $a\neq 0$: Montrons alors que $G=a\mathbb{Z}$.
D'une part, $a\in G$. Sinon, par l'absurde, on trouve $x\in G$ tel que $a<x<2a$ (par caractérisation de l'infimum). Toujours par propriété de la borne inférieure, on trouve $y\in G$,

$$a<y<x<2a$$

Alors $0<x-y<a$ avec $x-y\in G$, ce qui contredit la définition de a. Ainsi $a\in G$, donc $a\mathbb{Z}\subseteq G$.
D'autre part, si $x\in G$, il existe $n\in\mathbb{Z}$, $na\leqslant x<(n+1)a$ et donc $0\leqslant x-na<a$. Mais alors $x-na\in G\cap\mathbb{R}_+$ et $x-n_a\notin G\cap\mathbb{R}_+^*$ donc $x-na\in\{0\}$. Ainsi, $x\in a\mathbb{Z}$ et $G\subseteq a\mathbb{Z}$. Ceci conclut la preuve.

D) Approximation d'un réel par des rationnels et constante de Liouville

D.1 Erreur en approchant un réel par un rationnel ⋆⋆

Proposition 6.1.11: Une précision de densité

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \leqslant \frac{1}{q^2}$$

Démonstration. C'est une application du principe des tiroirs. Les $n+1$ éléments (non nécessairement distincts) $\{kx\} = kx - \lfloor kx \rfloor \in [0,1[$ (parties fractionnaires des kx) pour $k = 0, 1, \ldots, n$ se répartissent dans les n « tiroirs » $\left[\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n} \right[$ où $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Il existe donc un tiroir contenant deux parties fractionnaires :

$$\exists r, j, k \in \mathbb{N} \quad r < n, \quad j < k \leqslant n, \quad \frac{r}{n} \leqslant \{jx\}, \{kx\} < \frac{r+1}{n}$$

Alors, l'entier $q = k - j$ vérifie $1 \leqslant q \leqslant n$ et l'entier $p = \lfloor kx \rfloor - \lfloor jx \rfloor = (kx - \{kx\}) - (jx - \{jx\}) = qx - (\{kx\} - \{jx\})$vérifie

$$|qx - p| < \frac{1}{n}$$

D.2 Théorème d'approximation diophantienne de Liouville ⋆⋆

Définition 6.1.12: Nombre algébrique

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est *algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$.
On dit que x est algébrique de degré d où d est le degré de P.

Théorème 6.1.13: Approximation de Liouville

Soit x un nombre réel algébrique de degré $d \geqslant 2$. Alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{A}{q^d}$$

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, de degré $d > 1$, irréductible sur $\mathbb{Q}$ (donc sans racine rationnelle), tel que $P(x) = 0$.
Montrons que $\exists A > 0 \quad \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{A}{q^d}$.
Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Si $\left|x-\frac{p}{q}\right|>1$, on a immédiatement $\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^d}$
Sinon : $\frac{p}{q}\in[x-1,x+1]$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)-P(x)\right|\leqslant M\left|x-\frac{p}{q}\right|$$

avec $M=\max_{t\in[x-1,x+1]}\left|P'(t)\right|$
Or $q^d(P\left(\frac{p}{q}\right)-P(x))=q^dP\left(\frac{p}{q}\right)\in\mathbb{Z}^*$ (d'après les hypothèses sur P) donc

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)-P(x)\right|\geqslant\frac{1}{q^d}$$

Par conséquent :

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{Mq^d}$$

Posons $A=\min\left(1,\frac{1}{M}\right)$. On a dans tous les cas : $\left|x-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{A}{q^d}$

D.3 Transcendance de la constante de Liouville ⋆

Définition 6.1.14: Constante de Liouville

Soit $L=\sum_{n=0}^{+\infty}10^{-n!}$. L est appelé *constante de Liouville*.

La vérification de l'existence de L est immédiate (convergence de la série).

Proposition 6.1.15: Transcendance

L est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est pas algébrique.
Autrement dit, pour tout $P\in\mathbb{Z}[X]$, $P(L)\neq 0$.

Démonstration. On définit pour tout n, les entiers $q_n=10^{n!}$ et $p_n=\sum_{k=0}^{n}10^{n!-k!}$ de sorte que :

$$0\neq\left|L-\frac{p_n}{q_n}\right|=\sum_{k=n+1}^{+\infty}10^{-k!}\leqslant 10^{-(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}10^{-k}=\frac{10}{9}10^{-(n+1)!}=\frac{10}{9}\frac{1}{q_n^{n+1}}$$

L ne vérifie donc pas le théorème d'approximation de Liouville : par contraposée, il ne peut être algébrique.

E) Valeurs d'adhérence ⋆⋆⋆

Définition 6.1.16

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite. On dit que ℓ est valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) de limite ℓ.
Plus précisément, ℓ est valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ strictement croissante telle que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Théorème 6.1.17: Nature topologie des valeurs d'adhérence d'une suite

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un fermé de E.

Démonstration. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n).

◅ Montrons tout d'abord que :

$$\mathcal{V} = \bigcap_{p=0}^{+\infty} \overline{\{u_n, n \geqslant p\}}$$

— Soit $\ell \in \mathcal{V}$. Soit φ une extractrice, telle que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
Alors pour tout $n \geqslant p$, $u_{\varphi(n)} \in \{u_n, n \geqslant p\} = A_p$ et $d(u_{\varphi(n)}, \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
D'où $d(\ell, A_p) = 0$ et $\ell \in A_p$ d'après la Proposition 6.1.19. Ainsi $\ell \in \bigcap\limits_{p=0}^{+\infty} \overline{A_p}$.

— Soit $\ell \in \bigcap\limits_{p=0}^{+\infty} \overline{\{u_n, n \geqslant p\}}$. On construit φ telle que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$. $\ell \in \overline{A_0}$ donc on dispose de $u_{\varphi(0)} \in A_0$ tel que $d(x_{\varphi(0)}, \ell) \leqslant 1$.
Supposons $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ construits tels que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$d(u_{\varphi(j)}, \ell) \leqslant \frac{1}{2^j}$$

Or $\ell \in \overline{A_{\varphi(n)+1}} = \overline{\{u_k, k \geqslant \varphi(n)+1\}}$. On dispose donc d'un $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)+1$ tel que $d(u_{\varphi(n+1)}, l) < \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Ainsi φ est une extractrice et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$. Donc $\ell \in \mathcal{V}$.

◅ On en déduit le résultat car $\mathcal{V}$ est donc fermé comme intersection de fermés.

F) Distance à une partie ⋆⋆⋆

F.1 Définition et propriétés

Proposition 6.1.18

Soit A une partie non-vide de E. Alors l'application

$$d_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) = \inf\limits_{y\in A} \|x-y\| \end{array} \right.$$

est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue.

Démonstration. ◁ Bonne définition : si $x \in E$, $\{\|x-y\|, y \in A\}$ est non-vide et minorée par 0, donc la borne inférieure $d_A(x)$ existe.

◁ Soient $x, y \in E$. Pour tout $a \in A$,

$$d_A(x) \leqslant \|x-a\| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \|x-y\| + \|y-a\|$$

Ainsi, $d_A(x) - \|x-y\|$ est un minorant de $\{\|y-a\|, a \in A\}$. Donc,

$$d_A(x) - \|x-y\| \leqslant d_A(y) \text{ soit } d_A(x) - d_A(y) \leqslant \|x-y\|$$

On montre de même que $d_A(y) - d_A(x) \leqslant \|x-y\|$. Ce qui fournit :

$$|d_A(y) - d_A(x)| \leqslant \|x-y\|$$

◁ Ainsi d_A est 1-lispschitzienne donc uniformément continue sur E.

Proposition 6.1.19

Soit $A \subseteq E$. Soit $x \in E$. Alors $d(x,A) = 0$ *si et seulement si* $x \in \overline{A}$.

Démonstration. $d(x,A) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a) \geqslant 0$ donc par caractérisation de la borne inférieure,

$$\begin{aligned} d(x,A) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, d(x,a) < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \cap B(x,\varepsilon) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, A \cap B(x,\varepsilon) \neq \varnothing \\ &\iff x \in \overline{A} \end{aligned}$$

F.2 Compact et distance

Rappel 6.1.20: Compacité

Soit $K \subseteq E$. K est compact si toute suite de K admet une valeur d'adhérence.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme que les segments de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$ sont compacts.

Proposition 6.1.21: Distance d'un point à un compact

Soit K un compact. Alors pour $a \in E$, $d(a, K)$ est atteinte.

Démonstration. d_K est une application continue sur un compact, donc elle atteint sa borne inférieure qui est $d(a, K)$.

Proposition 6.1.22: Distance entre deux compacts

Soit K_1 et k_2 deux compacts. Alors $d(K_1, K_2)$ est atteinte.

Démonstration. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} K_1 \times K_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$ est continue sur $K_1 \times K_2$ compact (comme produit de compacts). Ainsi f atteint sa borne inférieure sur $K_1 \times K_2$.

Attention néanmoins, la distance à un fermé n'est pas nécessairement atteinte..

F.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Proposition 6.1.23

La distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie est atteinte.

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $a \in E$. Montrons que $d(a, E)$ est atteinte.
Par caractérisation de la borne inférieure, on trouve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n - a\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(a, E)$.
$(\|x_n - a\|)$ est convergente donc bornée par $M \geqslant 0$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n\| \overset{IT}{\leqslant} M + \|a\|$$

Ainsi (x_n) est bornée dans F de dimension finie donc (x_n) admet une valeur d'adhérence. On trouve donc φ extractrice,

$$x_{\varphi(n)} \to z \in E$$

$d(a, E) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_{\varphi(n)-a}\| = \|z - a\|$ donc la distance est atteinte en z.

II) Compacité

On rappelle qu'un compact est borné et fermé dans chacun de ses sur-ensembles. Un fermé dans un compact est compact. En dimension finie, un fermé borné est compact.

A) Théorème de Riesz ⋆⋆⋆

Théorème 6.2.1

$\overline{B}(0,1)$ est compacte *si et seulement si* E est de dimension finie.

Démonstration. Pour la réciproque, cela provient du cours : tout fermé borné en dimension finie est compact.
Considérons donc E de dimension infinie et prouvons que $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte. Il faut donc trouver une suite (x_n) qui n'admet pas de sous-suite extraite convergente.

◁ On montre tout d'abord le lemme suivant : si F est un sous-espace vectoriel fermé strict de E, alors il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u,F) > \frac{1}{2}$.
Prenons $v \in E \backslash F$. Comme F est fermé, il existe $r > 0$ tel que $B(v,r) \cap F = \varnothing$ et en particulier $d(v,F) = d \geqslant r > 0$.
Il existe, par définition de d, $f_0 \in F$ tel que $d \leqslant \|v - f_0\| \leqslant \frac{d}{\frac{1}{2}} = 2d$.
On a alors $u = \dfrac{v - f_0}{\|v - f_0\|} \in E$ de norme 1.
De plus pour tout $f \in F$,

$$\|v - f_0\|\,(u - f) = \|v - f_0\|\,(v - \overbrace{(f_0 + \|v - f_0\|\, f)}^{=f_1})$$

donc

$$\|u - f\| = \frac{\|v - f_1\|}{\|v - f_0\|} \geqslant d \times \frac{1}{2d} \geqslant \frac{1}{2}$$

D'où le résultat.

◁ Démonstration du théorème. E étant de dimension infinie, on peut construire des sous-espaces vectoriels strcits E_n de E tels que pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subsetneq E_{n+1}$.
D'après le lemme précédent, pour $n \in \mathbb{N}$, on peut constuire $u_n \in E_{n+1} \backslash E_n$ tels que $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_n) \geqslant \frac{1}{2}$.
La suite (u_n) ne peut pas admettre de valeur d'adhérence car :

$$\forall n \geqslant m \in \mathbb{N}, \|u_n - u_m\| \geqslant d(u_n, E_n) \geqslant \frac{1}{2}$$

On en conclut que $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

B) Intersection décroissante de compacts ⋆⋆

Proposition 6.2.2

Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non-vides de E. Alors :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$$

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{N}, K_n \neq \varnothing$ donc on dispose de $x_n \in K_n$.
La suite étant décroissante, $(x_n) \in K_0^{\mathbb{N}}$ et on dispose d'une suite extraite $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \in K_0$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. On montre que $z \in K_p$.
Pour $n \geqslant p$, $x_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(n)} \subseteq K_p$ car $\varphi(n) > n \geqslant p$.
Ainsi $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant p} \in K_p^{\mathbb{N}}$ avec K_p fermé donc $z = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in K_p$. Donc $z \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} K_p$.

C) Propriété de Borel-Lebesgue et outils

Définition 6.2.3: Deux définitions de la compacité

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $K \subseteq E$. On dit que :

1. K est *BL-compact* (Borel-Lebesgue) si de tout recouvrement d'ouverts de K, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.
   Autrement dit, s'il existe $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille infinie d'ouverts tels que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, on dispose de $i_1, \dots, i_d \in I$ tels que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{d} \Omega_j$.
2. K est *BW-compact* (Bolzano-Weierstrass) si toute suite à valeurs dans K admet une valeur d'adhérence.

Le but de cette partie est de montrer que ces deux définitions sont équivalentes. On montrera ainsi que :

- ◅ Tout BW-compact est BL-compact.
- ◅ Tout BL-compact est BW-compact.
- ◅ Nous commencerons pour cela par un cas particulier plus simple.

C.1 Un segment de $\mathbb{R}$ est BL-compact ⋆⋆

Proposition 6.2.4: Un segment de $\mathbb{R}$ est BL-compact

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Alors $[a\,,b]$ est BL-compact.

Démonstration. Considérons une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ tels que $[a\,,b] \subseteq \bigcup_{i\in I}\Omega_i$.
Posons :

$$\mathcal{A} = \{c \in [a\,,b]\,, [a\,,c] \text{ peut être recouvert par un nombre fini de } (\Omega_i)_{i\in I}\}$$

- ◁ $\mathcal{A} \neq \varnothing$: on dispose de $i_0 \in I$ tel que $a \in \Omega_{i_0}$. $[a\,,a]$ peut être recouvert par Ω_{i_0}. Ainsi $a \in \mathcal{A}$.
- ◁ $\mathcal{A}$ est majoré : par b.

On peut donc considérer $\beta = \sup \mathcal{A}$. Le but est de montrer que $\beta = b$.

- ◁ D'une part, $\beta > a$. En effet, comme Ω_{i_0} est un ouvert, on trouve $\delta > 0$ tel que $[a\,,a+\delta[\subseteq \Omega_{i_0}$. Ainsi, $[a\,,a+\delta[\subseteq \mathcal{A}$ et $\beta \geqslant a+\delta > a$.
- ◁ D'autre part, comme $\beta \in [a\,,b]$, on trouve $j_0 \in I$ tel que $\beta \in \Omega_{j_0}$.
  Comme Ω_{j_0} est ouvert, on trouve $\eta > 0$ tel que $]\beta-\eta\,,\beta+\eta[\subseteq \Omega_{j_0}$.
  Par propriété de la borne supérieure, on trouve $c \in \mathcal{A}$ tel que $\beta - \eta < c \leqslant \beta$. Or comme $c \in \mathcal{A}$, on trouve $J \subseteq I$ fini tel que

  $$[a\,,c] \subseteq \bigcup_{j\in J}\Omega_j$$

  Ainsi,

  $$[a\,,\beta+\eta[\subseteq \bigcup_{j\in J\cup\{j_0\}}\Omega_j$$

  Donc pour tout $x \in [a\,,\beta+\eta[\cap [a\,,b]$, $[a\,,x]$ peut être recouvert par un nombre fini de (Ω_i) et ainsi $x \in \mathcal{A}$.
- ◁ Donc $[a\,,\beta+\eta[\cap [a\,,b] \subseteq \mathcal{A}$. Donc $\beta = b \in \mathcal{A}$.

C.2 BW ⇒ BL ⋆⋆

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé pour la suite.
On montre dans cette sous-partie que tout BW-compact est BL-compact. On montre pour cela une propriété intermédiaire : tout BW-compact est précompact.

Définition 6.2.5: Précompacité

Soit $A \subseteq E$. Alors A est *précompacte* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists d \in \mathbb{N}^*, \exists (x_1, \ldots, x_n) \in A^d, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{d} B(x_j, \varepsilon)$$

Pour tout rayon ε fixé, on peut recouvrir A par un nombre fini d'ouverts de ce rayon.

Lemme 6.2.6: BW ⇒ précompact

Soit K un BW-compact. Alors K est précompact.

Démonstration. On procède par contraposée, en supposant que K n'est pas précompact. On dispose donc de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x_1, \dots x_d \in K$, $K \not\subset \bigcup_{j=1}^{d} B(x_j, \varepsilon)$.

- ◅ Soit $x_1 \in K$. Par hypothèse, $K \not\subset B(x_1, \varepsilon)$. On chosit donc $x_2 \in K \backslash B(x_1, \varepsilon)$.
- ◅ Supposons construits $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tels que pour tout $j \in [\![2\,, n]\!]$, $x_j \notin \bigcup_{i=1}^{j-1} B(x_i, \varepsilon)$.
  Comme $K \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$, on trouve $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.
- ◅ Ainsi pour tous $n < m$ entiers, $\|x_n - x_m\| \geqslant \varepsilon$ car $x_m \notin B(x_n, \varepsilon)$. Une telle suite ne dispose pas de sous-suite convergente. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 6.2.7: BW ⇒ BL

Soit K un BW-compact. Alors K est un BL-compact.

Démonstration. Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ des ouverts de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

- ◅ Etape 1 : On trouve un $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall x \in K, \exists j \in J, B(x, \varepsilon) \subseteq \Omega_j$.
  Par l'absurde on suppose qu'il n'existe pas de tel ε. Alors pour tout $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de $x_n \in K$ tel que
  $$\forall j \in J, B(x_n, \varepsilon_n) \not\subset \Omega_j (\star)$$
  K étant BW-compact, on trouve φ une extractrice telle que
  $$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} z \in K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$$
  Ainsi, $z \in \Omega_{j_0}$ pour un certain $j_0 \in I$. Ω_{j_0} étant un ouvert, on dispose de $r > 0$ tel que $B(z, r) \subseteq \Omega_{j_0}$.
  Mais par définition de la limite, on dispose également de $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|x_{\varphi(N_0)} - z\right\| \leqslant \dfrac{r}{2}$.
  Par inégalité triangulaire,
  $$B\left(x_{\varphi(N_0)}, \frac{1}{\varphi(N_0) + 1}\right) \subseteq B(z, r) \subseteq \Omega_{j_0}$$
  ce qui contredit $(\star)$.
- ◅ Etape 2 : On applique la précompacité de K (prouvée au Lemme précédent) avec un tel $\varepsilon > 0$.
  On dispose pour ce $\varepsilon > 0$, d'un $d \in \mathbb{N}^*$ et de $x_1, \dots, x_d \in K$ tels que
  $$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{d} B(x_j, \varepsilon)$$

De plus, par choix de ε, pour $j \in [\![1\,,d]\!]$, on dispose de $i_j \in I$ tel que $B(x_j,\varepsilon) \subseteq \Omega_{i_j}$. On conclut que :

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{d} \Omega_{i_j}$$

K est donc BL-compact.

C.3 BW $\Rightarrow$ BL $\star$

Etablissons deux résultats préliminaires.

Lemme 6.2.8: Intersection décroissante de fermés dans un BL-compact

Soit K un BL-compact.
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non-vides inclus dans K. Alors,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = E\backslash F_n$ qui est un ouvert. Alors,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E\backslash F_n = E\backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$$

Comme $K \subseteq E$, on a $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. K étant BL-compact, on trouve, quitte à renuméroter les éléments, $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} \Omega_j$. Ainsi,

$$F_{n_0} = \bigcap_{j=0}^{n_0} F_j \subseteq E\backslash K$$

Mais $F_{n_0} \subseteq K$ par hypothèse donc $F_{n_0} = \varnothing$, ce qui est exclu.

Lemme 6.2.9: Un BL-compact est fermé

Soit K un BL-compact. Alors K est fermé dans E.

Démonstration. Par l'absurde, considérons une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $z \notin K$. Posons :

$$\Omega_n = E\backslash \overline{B}\left(z, \frac{1}{n+1}\right)$$

Remarquons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}\left(z, \frac{1}{n+1}\right) = \{z\} \notin K$. Donc $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Comme précédemment, on trouve $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$K \subseteq \bigcup_{n=0}^{n_0} \Omega_n$$

Alors, $\bigcap_{n=0}^{n_0} \overline{B}\left(z, \frac{1}{n+1}\right) \subseteq E\backslash K$. Or, $x_n \in \overline{B}\left(z, \frac{1}{n+1}\right)$. Cela contredit que $x_n \in K$.

Théorème 6.2.10: BL ⇒ BW

Soit K un BL-compact. Alors K est un BW-compact.

Démonstration. Soit $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n). On montre que $\mathcal{V} \neq \varnothing$.
On sait par le Théorème 6.1.17, que $\mathcal{V} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\underbrace{\{x_k, k \geqslant p\}}_{=F_p}}$.
Les (F_p) sont une suite décroissante de fermés non-vides inclus. De plus K est un BL-compact donc il est fermé d'après le Lemme 6.2.9. Ainsi, $F_p \subseteq K$.
Finalement par le Lemme 6.2.8, $\mathcal{V} \neq \varnothing$. Cela conclut la preuve.

D) Ensemble suite-limite ⋆⋆

Lemme 6.2.11

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite.
Alors l'ensemble $K = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$.

- ◅ Si $\{n \in \mathbb{N}, y_n = \ell\}$ est infini, on dispose d'une extractrice φ telle que $y_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$ et donc convergente.
- ◅ Si $\{k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, y_n = x_k\}$ est fini, x_k est prise une infinité de fois. On trouve donc une extractrice φ telle que pour tout n, $y_{\varphi(n)} = x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_k \in K$.
- ◅ Sinon, $\{k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, y_n = x_k\}$ est infini. On construit deux extractrices φ et ψ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{\varphi(n)} = x_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in K$$

  - — Soit $\varphi(0) = \min\{n \mid y_n \neq \ell\}$. Soit $\psi(0)$ tel que $y_{\varphi(0)} = x_{\psi(0)}$.
  - — Supposons $\varphi(0) < \cdots < \varphi(n)$ et $\psi(0) < \cdots < \psi(n)$ construits tels que $x_{\psi(n)} = y_{\varphi(n)}$.
    L'ensemble $A_k = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists m \geqslant \varphi(n) + 1, y_m = x_k\}$ est encore infini. Il exsite donc $k \in A_n$ tel que $k \geqslant \varphi(n) + 1$: on l'appelle $\psi(n+1)$.
    Comme $k = \psi(n+1) = A_n$, $x_{\psi(n+1)} = y_{\varphi(n+1)}$ avec $\varphi(n+1) > \varphi(n) + 1$.

III) Applications linéaires continues

A) Caractérisations ⋆⋆⋆⋆

Théorème 6.3.1: Caractérisations de la continuité d'une application linéaire

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. φ est continue sur E.
2. φ est continue en 0.
3. $\exists k>0, \forall x \in E, \|\varphi(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$
4. $\exists k>0, \forall (x,y) \in E^2, \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_F \leqslant k\|x-y\|_E$

Proposition 6.3.2: Montrer la non-continuité d'une AL

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. φ n'est continue sur E.
2. φ n'est pas continue en 0.
3. $\exists (y_n) \in \mathbb{S}(0,1)^{\mathbb{N}}, \|\varphi(y_n)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
4. $\exists (z_n), z_n \longrightarrow +\infty$ et $\varphi(z_n)$ ne tend pas vers 0

Démonstration. φ n'est pas continue sur E
$\iff \forall k>0, \exists x \in E, \|\varphi(x)\| > k\|x\|$
$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E, \|\varphi(x_n)\| > n\|x_n\|$.

◁ On peut poser $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ et ceci nous donne la première équivalence.

◁ On peut poser $z_n = \dfrac{x_n}{\|\varphi(x_n)\|}$. Ainsi, $\|\varphi(z_n)\| = 1$ et $\|z_n\| < \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Corollaire 6.3.3

φ est continue sur E *si et seulement si* φ est bornée sur $\mathbb{S}(0,1)$ *si et seulement si* φ est bornée sur $\overline{B}(0,1)$.

Rappel 6.3.4: Divers rappels

- ◁ Toute application linéaire est continue en dimension finie. Ceci est vrai **seulement** en dimension finie (voir exemples ci-après)
- ◁ Toute application continue sur un compact est uniformément continue (Heine).
- ◁ L'image d'un compact par une application continue est un compact.

B) Comportement sur une boule ⋆⋆⋆⋆

Théorème 6.3.5

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. **Connaître φ sur $B(a,r), r>0$ permet de connaître φ sur E entier**.
En effet, pour $x \in E$,

$$\varphi(x) = \frac{2\|x\|}{r}(\varphi(x_1) - \varphi(a))$$

où $x_1 = a + \frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(a,r)$.

Démonstration. On a :

$$x = \frac{2\|x\|}{r}\left(\underbrace{\left(a + \frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)}_{=x_1} - a\right)$$

d'où

$$\varphi(x) = \frac{2\|x\|}{r}(\varphi(x_1) - \varphi(a))$$

Corollaire 6.3.6: Nouvelle caractérisation de la continuité

$\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue *si et seulement si* il existe une boule de rayon >0 sur laquelle φ est bornée.

Démonstration. ◅ On a vu que si φ est continue alors elle est bornée sur $B(0,1)$.

◅ Supposons φ bornée par M sur $B(a,r)$. Montrons que φ est continue.
Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Avec les notations ci-dessus,

$$\varphi(x) = \frac{2}{r}\|x\|(\varphi(x_1) - \varphi(a))$$

où $x_1 = a + \frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(a,r)$. Ainsi,

$$\|\varphi(x)\|_F \leqslant \frac{2}{r}\|x\|_E \times 2M = k\|x\|_E$$

donc φ est linéaire continue.

Proposition 6.3.7

Soit F un sous-espace vectoriel strict de E. Alors F est d'intérieur vide.

Démonstration. Soit $a \in F$ et $r>0$ tel que $B(a,r) \subseteq F$.
Soit $x \in E\backslash\{0\}$. On pose le même $x_1 \in F$. Alors $x \in F$ par stabilité par somme.

C) Exemples et contre-exemples ⋆⋆⋆⋆

Exemple 6.3.8: Non-équivalence des normes en dimension infinie

Considérons

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{cases}$$

Etudions la continuité de φ sur deux normes usuelles de $\mathbb{R}[X]$.

- ◅ $\underline{\|\cdot\|_1}$: Avec $P_n = X^n$, $\|P_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$ d'où $\dfrac{|\varphi(P_n)|}{\|P_n\|_1} = n+1 \longrightarrow +\infty$. Ainsi, φ n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.
- ◅ $\underline{\|\cdot\|_\infty}$: $|\varphi(P)| = |P(1)| \leqslant \|P\|_\infty$ donc φ est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exemple 6.3.9: Une condition nécessaire et suffisante pour que l'identité soit continue

Soit E quelconque, de dimension infinie.
$\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}_c((E, \|\cdot\|_1), (E, \|\cdot\|_2)) \iff \exists k > 0, \forall x \in E, \|\mathrm{id}_E(x)\|_2 \leqslant k \|\mathrm{id}_E(x)\|_1$
$\iff \|\cdot\|_1$ plus fine que $\|\cdot\|_2$

D) Un théorème de point fixe et de compacité ⋆⋆⋆⋆

Théorème 6.3.10

Soit $f \in \mathcal{F}(K, K)$ où K compact, telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

Alors f admet un unique point fixe.

Démonstration. Soit $g : \begin{cases} K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f(x) - x\| \end{cases}$ continue car $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne.

- ◅ Ainsi, g est continue sur un compact, elle est donc bornée et atteint ses bornes. Soit $a \in K$.

$$\inf_{x \in K} g(x) = g(a) = \|a - f(a)\|$$

Par l'absurde si $f(a) \neq a$, $\|f(f(a)) - f(a)\| < \|f(a) - a\|$ c'est-à-dire $g(f(a)) < g(a) = \inf_{x \in K} g(x)$, c'est absurde. Donc a est un point fixe de f.

- ◅ Si $f(a) = a$ et $f(b) = b$, si $a \neq b$, $\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| < \|a - b\|$: absurde.

Corollaire 6.3.11: Suites récurrentes sur un compact

Soit $x_0 \in K$. On définit $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $x_n \to a$, unique point fixe.

Démonstration. On pose $\delta_n = \|x_n - a\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\delta_{n+1} = \|x_{n+1} - a\| = \|f(x_n) - f(a)\|$.

- Si $x_n = a$, alors $x_{n+1} = a$ et (δ_n) est stationnaire égale à 0.
- Sinon $\delta_{n+1} < \delta_n$ par hypothèse. La suite est alors décroissante et minorée par 0 donc converge vers α.
  Or (x_n) est à valeurs dans un compact : soit donc φ extractrice telle que

$$x_{\varphi(n)} \longrightarrow z \in K$$

  $\|z - a\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_{\varphi(n)} - a\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \delta_{\varphi(n)} = \alpha$.
  Par l'absurde si $\alpha > 0$, alors $\|f(z) - a\| = \|f(z) - f(a)\| < \|z - a\| = \alpha$
  d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f(x_{\varphi(n)}) - a\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_{\varphi(n)} - a\| = \alpha$, c'est impossible.

E) Théorème de Hann-Banach ⋆⋆

On notera $\mathcal{L}_c(A, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications linéaires continues d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A dans $\mathbb{K}$.

Théorème 6.3.12: Hann-Banach

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}_c(F, \mathbb{K})$, et $k \in \mathbb{R}_+^*$, telle que $|||\varphi||| \leqslant k$.
Alors, il existe $\psi \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ telle que $\begin{cases} \psi_{|F} = \varphi \\ |||\psi||| \leqslant k \end{cases}$.

Démonstration. On considère, quitte à multiplier par k, le cas $|||\varphi||| \leqslant 1$.
Soit $x_1 \notin F$, et $F_1 = \text{Vect}\,(x_1) \oplus F$. On cherche dans un premier temps à prolonger φ à F_1.
Ensuite, il suffira de poursuivre par récurrence (non détaillée).
On cherche un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall y \in F, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(y + tx_1) = \varphi(y) + t\alpha \text{ avec } |\varphi(y) + t\alpha| \leqslant \|y + tx_1\|$$

On utilise la 1-lipschitzianité. Pour $y \in F$,

$$\varphi(x) - \varphi(y) \leqslant |\varphi(x - y)| \leqslant \|x - y\| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \|x - x_1\| + \|y - x_1\|$$

Ainsi $\varphi(x) - \|x - x_1\| \leqslant \varphi(y) - \|y - x_1\|$. D'où

$$\underbrace{\sup_{x\in F} \varphi(x) - \|x - x_1\|}_{=u} \leqslant \underbrace{\inf_{y\in F} \varphi(y) - \|y - x_1\|}_{=v}$$

On prend alors $\alpha \in [u\,, v]$ et on montre que $\varphi_1 : y + tx_1 \longmapsto \varphi(y) + t\alpha$ convient :

◅ Si $t = 0$: $\varphi(y) \leqslant \|y\|$ car $|||y||| \leqslant 1$.

◅ Si $t > 0$: on a

$$\alpha \leqslant \varphi\left(\frac{y}{t}\right) - \left\|\frac{y}{t} + x_1\right\|$$

d'où $|\varphi(y) + t\alpha| \leqslant \|y + tx_1\|$.

◅ Si $t < 0$: de même.

IV) Connexité

A) Connexité par arcs ⋆⋆⋆

On donne ici quelques exercices classiques sur la connexité par arcs.

Proposition 6.4.1

Soit $A \subseteq \mathbb{C}$ au plus dénombrable. Alors $\mathbb{C}\backslash A$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{C}\backslash A$ et Δ médiatrice de $[a, b]$.
Pour tout $x \in \Delta$, on considère le chemin qui relie $a \longrightarrow x \longrightarrow b$:

$$\gamma_x : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (1-2t)a + 2tx & t \in \left[0\,, \dfrac{1}{2}\right] \\ -2tx + (2t-1)b & t \in \left[\dfrac{1}{2}\,, 1\right] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour $x \neq y$, $\gamma_x\,]0\,,1[) \cap \gamma_y\,]0\,,1[) = \varnothing$.
Par l'absurde si $\forall x \in \Delta, \gamma_x\,]0\,,1[) \cap A \neq \varnothing$, on peut définir l'application injective :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & a \in \gamma_x\,]0\,,1[) \cap A \end{array} \right.$$

impossible car Δ indénombrable.

Proposition 6.4.2: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une partie étoilée, elle est donc connexe par arcs.

Démonstration. On va montrer que toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être reliée continuement à I_n. Soit donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

◅ On considère un chemin candidat :

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & (1-t)I_n + tA \end{array} \right.$$

Mais on peut avoir $(1-t)I_n + tA \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: il faut donc "contourner" cette possibilité.

◅ Remarque :

$$\det(\gamma(t)) = 0 \iff \det\left(A + \frac{1-t}{t} I_n\right) = 0 \iff \frac{t-1}{t} \in \mathrm{Sp}(A)$$

L'ensemble $\mathcal{D} = \{t \in \mathbb{C}^*, \frac{t-1}{t} \in \mathrm{Sp}(A)\}$ est fini. Donc $\mathbb{C}\backslash\mathcal{D}$ est connexe par arcs. De plus, $0, 1 \notin \mathcal{D}$.
On trouve donc $s : [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\mathcal{D}$ chemin reliant 0 à 1.
On pose

$$\tilde{\gamma} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & (1-s(t))I_n + s(t)A \end{array} \right.$$

continue car s est continue. De plus $s(0) = 0$ et $s(1) = 1$ donc $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$.
Pour tout $t \in [0\,,1]$, $s(t) \notin \mathcal{D}$ d'où $\det(\gamma(t)) \neq 0$ *id est* $\gamma(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

On sait maintenant que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, mais $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas. En effet det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ non connexe par arcs. Cela contredit le fait qu'une application continue envoie un connexe par arcs sur un connexe par arcs.

Proposition 6.4.3: Composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont :
- ◅ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^- = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) < 0\}$
- ◅ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) > 0\}$

Démonstration. On utilise le fait que toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme produit de matrices de transvection et d'une matrice de dilatation $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ (démontré au Théorème 4.3.5).

◅ Ainsi, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$, on peut la relier continuement à I_n.
Ainsi, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^-$, on peut la relier continuement à D_{-1}.

◅ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$. On écrit :

$$A = \prod_{k=1}^{N} T_{i_k,j_k}(\lambda_k) D_{\det(A)}$$

Soit $s : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,,1] & \longrightarrow & \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & I_n + t\lambda E_{ij} \end{array} \right.$ continue. On a $s(0) = I_n$ et $s(1) = T_{ij}(\lambda)$.
Par ailleurs, $\lambda = \det(A) > 0$ et

$$t \mapsto D_{(1-t)+t\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & (1-t)+t\lambda \end{pmatrix}$$

est continue à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$. Finalement,

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \prod_{k=1}^{N} (I_n + t\lambda_k E_{i_k,j_k}) \end{cases}$$

est continue (chaque coordonnée de $\gamma(t)$ est polynomiale en t) et $\gamma(0) = I_n, \gamma(1) = A$. γ est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$. Idem pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^-$.

Remarque 6.4.4

La même démonstration permet de montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

B) Connexité ⋆⋆

Définition 6.4.5

Soit $A \subseteq E$. On dit que A est connexe si les seules parties ouvertes et fermées de A sont $\varnothing$ et A.

Théorème 6.4.6

Une partie connexe par arcs est connexe.

La réciproque est fausse.

Démonstration. Soit $x \subseteq A$ ouvert et fermé dans A.
Par l'absurde si $X \neq \varnothing$ et $A \backslash X \neq \varnothing$, soient $a \in X$ et $b \in A \backslash X$.
Comme A est connexe par arcs, on dispose de γ un chemin continu de a vers b, avec $\gamma(0) = a \in X$ et $\gamma(1) = b \in A \backslash X$.
Soit $\alpha = \sup\{t \in [0,1], \gamma(t) \in X\}$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $(t_n) \in]0,\alpha[^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \to \alpha$ et $\gamma(t_n) \in X$.
Ainsi $\gamma(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\gamma(t_n)}_{\in X} \in X$ car X est fermé. Ainsi $\alpha < 1$.
$\forall t \in]\alpha, 1[, \gamma(t) \in A \backslash X$ fermé d'où $\gamma(\alpha) = \lim_{t\to\alpha^+} \gamma(t) \in A \backslash X$. Absurde.

V) Hyperplans

A) Adhérence d'un hyperplan ⋆⋆⋆

Lemme 6.5.1

Si F est un sous-espace vectoriel, alors $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel.

Démonstration. Soit $(a,b) \in \overline{F}^2$. Alors on dispose de $(a_n),(b_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telles que $a = \lim a_n$ et $b = \lim b_n$.
Ainsi pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda a + \mu b = \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$.

Proposition 6.5.2

Si H est un hyperplan de E. Alors H est fermé ou dense dans E.

Démonstration. Deux méthodes.

- D'après le lemme $H \subseteq \overline{H} \subseteq E$.
  Supposons $\overline{H} \neq E$. Montrons que $\overline{H} = H$. Soit $x_0 \in E \backslash \overline{H}$. Ainsi $x_0 \notin H$, et $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.
  Soit $y \in \overline{H} \subseteq E$. $y = y_H + \alpha x_0$ d'où $\alpha x_0 = y - y_H \in \overline{H}$.
- Soit H un hyperplan de E. $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ où $\varphi \in E^*$.
  - Si φ est continue, d'où $\mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(\{0\}) = H$ fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
  - Si φ n'est pas continue, soit $a \in E$
    On construit $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. On traduit la non-continuité de φ : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut poser $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|\varphi(z_n)| > n\,\|z_n\|$.
    Soit $y_n = \dfrac{z_n}{\varphi(z_n)}$ ainsi $\varphi(y_n) = 1$ et $\|y_n\| = \dfrac{\|z_n\|}{|\varphi(z_n)|} < \dfrac{1}{n} \to 0$.
    On pose $x_n = a - \varphi(a)y_n$ et ainsi $\varphi(x_n) = 0$, et $\|x_n - a\| = |\varphi(a)|\,\|y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

B) Noyau d'une forme linéaire ⋆⋆⋆

En reprenant le principe de la démonstration précédente, il vient :

Proposition 6.5.3

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$. Alors, φ est continue *si et seulement si* $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est fermé.

Démonstration. On reprend la suite (y_n) de la démonstration précédente : $\varphi(y_n) = 1$ mais $\|y_n\| \to 0$.
Posons alors $\delta_n = y_0 - y_n \to y_0 \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$ car $\varphi(y_0) = 1$.
Ainsi $\varphi(\delta_n) = 1 - 1 = 0$ donc $(delta_n) \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)^{\mathbb{N}}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} delta_n \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$. Ce qui prouve que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ n'est pas fermé.

VI) Topologie de matrices

A) Lemmes clés ⋆⋆⋆⋆

Lemme 6.6.1

Soit T une matrice triangulaire supérieure.
Alors on dispose de $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$,

$$P_k T P_k^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} t_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Démonstration. Posons $P_k = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & k & \\ & & \ddots \\ (0) & & k^{n-1} \end{pmatrix}$ et $P_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \frac{1}{k} & \\ & & \ddots \\ (0) & & k^{-n+1} \end{pmatrix}$.

Soient $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$.
$[P_k T P_k^{-1}]_{i,j} = k^{i-1} t_{ij} k^{-(j-1)} = t_{ij} k^{i-j}$.

- ◁ Pour $i = j$, $[P_k T P_k^{-1}]_{i,i} = t_{ii} \to t_{ii}$
- ◁ Pour $i > j$, $t_{ij} = 0$ d'où $[P_k T P_k^{-1}]_{i,j} = 0$
- ◁ Pour $i < j$, $k^{i-j} \to 0$ d'où $[P_k T P_k^{-1}]_{i,j} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Ainsi $P_k T P_k^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} t_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & t_{nn} \end{pmatrix}$.

Lemme 6.6.2

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire de degré n. Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.

Démonstration.

- ◁ $\Rightarrow$: Supposons que $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$. $|P(z)| = \prod_{i=1}^{n}|z - \alpha_i| \leqslant \prod_{i=1}^{n}|\mathrm{Im}(z - \alpha_i)|$. Or $\alpha_i \in \mathbb{R}$ donc $\mathrm{Im}(z - \alpha) = \mathrm{Im}(z)$. Ainsi :

$$|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$$

- ◁ $\Leftarrow$: Si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $P(z)^n \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n > 0$ donc P n'admet aucune racine sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Ainsi P est scindé sur $\mathbb{R}$.

B) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ⋆⋆⋆⋆

Proposition 6.6.3

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert ($\mathbb{C}^*$) par une application continue (det).

Proposition 6.6.4

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\delta = \min\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\backslash\{0\}\} > 0$.
Soit n_0 tel que pour $k \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{k} < \delta$. Considérons

$$A_k = A + \frac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Or $\left\| (A + \dfrac{1}{k} I_n) - A \right\| = \|A_k - A\| = \dfrac{1}{k} \|I_n\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$

C) Densité des diagonalisables, adhérence des trigonalisables ⋆⋆⋆⋆

Proposition 6.6.5

L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. On reprend la même démonstration qu'au Théorème 5.4.11, lorsqu'il s'agissait de montrer que $\Omega(E)$ (l'ensemble des endomorphismes cycliques) était dense dans $\mathcal{L}(E)$. Posons donc $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \chi_M$ scindé à racines simples$\}$ et $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable$\}$. On cherche donc à montrer que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \subseteq \overline{\mathcal{D}}$. On montre pour cela que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \subseteq \overline{\mathcal{C}} \subseteq \overline{\mathcal{D}}$$

Soit donc $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors M est trigonalisable, $M = PTP^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Soit $\delta = \min\{|\lambda_i - \lambda_j|, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \lambda_i \neq \lambda_j\}$ (on prend $\delta = 1$ si il n'y a qu'une seule

valeur propre). Alors $\delta > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Pour tout $k \geqslant n_0$ considérons :

$$M_k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & & & (t_{ij}) \\ & \lambda_2 + \frac{1}{2k} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n + \frac{1}{nk} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Montrons que $M_k \in \mathcal{C}$. On montre que les coefficients diagonaux de M_k sont deux-à-deux distincts. Soient $i \neq j$.

- ◅ Si $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i + \frac{1}{ik} \neq \lambda_j + \frac{1}{jk}$.
- ◅ Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, $|\lambda_i - \lambda_j| \geqslant \delta$. Or $\left|\frac{1}{ik} - \frac{1}{jk}\right| \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{\delta}{2}$. D'où $\lambda_i + \frac{1}{ik} \neq \lambda_j + \frac{1}{jk}$.

De plus, on a bien $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & & & (t_{ij}) \\ & \lambda_2 + \frac{1}{2k} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n + \frac{1}{nk} \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to +\infty]{} T$. Donc par continuité de l'application $A \mapsto PAP^{-1}$, on a :

$$M_k = PT_kP^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} PTP^{-1} = M$$

Ainsi $M \in \overline{\mathcal{C}} \subseteq \overline{\mathcal{D}}$.

Proposition 6.6.6

L'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dense dans l'ensemble des matrices trigonalisables $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a de plus $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{T}$.

Démonstration. ◅ Par le même argument que précédemment, $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{D}}$, ce qui montre la densité.

◅ Montrons maintenant que $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{T}$. Posons $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ unitaire de degré } n\} \subseteq \mathbb{R}_n[X]$, alors $G = \{P \in F, P \text{ scindé sur } \mathbb{R}\}$ est fermé dans F :

- En effet $G = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \varphi_z^{-1}([|\mathrm{Im}(z)|, +\infty[)$ où $\varphi_z : P \longmapsto |P(z)|$ continue (car linéaire en dimension finie).
- Ainsi G est l'image d'un fermé par une application continue donc est fermé.

On peut donc montrer que $\mathcal{T}$ est un fermé. En effet,

$$\theta : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & F \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{cases}$$

est continue et $\mathcal{T} = \theta^{-1}(G)$. G étant fermé, $\mathcal{T}$ est fermé.
On en déduit que $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ et comme $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$, on a $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$.

D) Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ⋆⋆⋆

Proposition 6.6.7

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = M^{-1}\}$ est compact.

Démonstration. On montre que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné : cela est suffisant pour montrer que c'est un compact car nous sommes en dimension finie.

◁ Fermé : Considérons

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^\top A \end{array} \right.$$

Chaque coordonnée de $A^\top A$ est polynomiale en les (a_{ij}) donc θ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Or $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \theta^{-1}(\{I_n\})$ qui est donc fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

◁ Borné : On considère la norme infinie des matrices.
Pour $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$ d'où $\|A\|_\infty \leqslant 1$.

E) Classes de similitude ⋆⋆

Soit pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $S(M) = \{P^{-1}MP, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$.

Proposition 6.6.8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors M est diagonalisable *si et seulement si* $S(M)$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. ◁ $\Leftarrow$: A est trigonalisable donc $A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (t_{ij}) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=T} P^{-1}$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après le Lemme 6.6.1, on dispose de $(P_k) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$P_k^{-1} T P_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = D \text{ diagonale}$$

d d'où $\underbrace{P_k^{-1} P^{-1} A P P_k}_{\in S(A)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} D$ d'où $D \in \overline{S(A)} = S(A)$. Ainsi A est diagonalisable.

◁ $\Rightarrow$: Supposons A diagonalisable. Soit $M \in \overline{S(A)}$. Alors on dispose de $(B_k) \in S(A)^{\mathbb{N}}$ tels que

$$B_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} M$$

Comme précédemment, $\chi_{B_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_M$ et comme $B_k \in S(A)$, $\chi_M = \chi_A$.
De plus A est diagonalisable donc π_A est scindé à racines simples. Comme $B_k \in S(A)$, $\pi_A(B_k) = O_n$.
Mais $\mathbb{R} \mapsto \pi_A(R)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc

$$\pi_A(M) = \lim_{k\to+\infty} \pi_A(B_k) = O_n$$

Comme π_A est scindé à racines simples, M est diagonalisable. Deux matrices diagonalisables de même polynôme caractéristiques sont semblables (caar elles ont même spectre avec les mêmes multiplicités). Donc M et A sont semblables. Ainsi $M \in S(A)$.

Proposition 6.6.9

M est nilpotente *si et seulement si* $0 \in \overline{S(M)}$.

Démonstration. $\lhd \Rightarrow$: Soit N nilpotente. Alors on dispose de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $N = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 0 & & (t_{ij}) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $P_k^{-1} T P_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi $\underbrace{(PP_k)^{-1} N (PP_k)}_{\in S(N)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ d'où $0 \in \overline{S(N)}$.

$\lhd \Leftarrow$: On suppose $0 \in \overline{S(N)}$. On dispose d'une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (S(N))^{\mathbb{N}}$ telle que $M_k = P_k N P_k^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, telle que $M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
Remarquons que pour $k \in \mathbb{N}$, $\chi_{M_k} = \chi_N$ d'après la relation de similitude. L'application $M \mapsto \chi_M$ étant continue, on a

$$\chi_N = \chi_{M_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_{O_n} = X^n$$

Ainsi $\chi_N = X^n$ et donc N est nilpotente.

VII) Complétude

A) Suites de Cauchy ⋆⋆⋆

Définition 6.7.1

On dit que $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N, \forall q \geqslant N, \|x_p - x_q\| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire que $\|x_p - x_q\| \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$.

Lemme 6.7.2

Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration. Soit $\varepsilon = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant N, \forall q \geqslant N, \|x_p - x_q\| \leqslant 1$.
En particulier, $\forall p \geqslant N, \|x_p - x_N\| \leqslant 1$ *id est* $x_p \in \overline{B}(x_N, 1)$. Ainsi $(x_p)_{p\geqslant N}$ est bornée donc $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Lemme 6.7.3

Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.

Démonstration. Soit (x_n) de Cauchy. On dispose de φ une extratrice telle que, $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soient $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\forall n \geqslant N_1, \left\|x_{\varphi(n)} - \ell\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall p, q \geqslant N_2, \|x_p - x_q\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $n \geqslant \max(N_1, N_2)$. Nécessairement, $\varphi(n) \geqslant \max(N_1, N_2)$. Alors :

$$\|x_n - \ell\| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \left\|x_n - x_{\varphi(n)}\right\| + \left\|x_{\varphi(n)} - \ell\right\| < \varepsilon$$

Corollaire 6.7.4

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite de Cauchy converge.

Démonstration. Soit E de dimension finie. Soit (x_n) de Cauchy. Elle est bornée dans un espace de dimension finie donc elle admet une valeur d'adhérence. Par le lemme précédent, elle converge.

B) Espaces complets ⋆⋆

Définition 6.7.5

On dit qu'un espace $(E, \|\cdot\|)$ est complet si toute de suite de Cauchy à valeurs dans E converge.

Théorème 6.7.6

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Démonstration. Corollaire immédiat de la partie précédente.

Théorème 6.7.7

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet. Alors, toute série absolument convergente converge.

Ce théorème est hors-programme sauf en dimension finie.

Démonstration. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n \|x_n\|$ converge. On montre que $\sum x_n$ converge *id est* que la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ converge.
Pour cela, on montre que (S_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \|x_n\| < \varepsilon$$

Soient $p \geqslant q \geqslant N$,

$$\|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{k=q+1}^{p} x_k \right\| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \sum_{k=q+1}^{p} \|x_k\| < \varepsilon$$

Ainsi (S_n) est de Cauchy donc converge.

C) Théorème du point fixe de Picard ⋆⋆

Théorème 6.7.8

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet (ou de dimension finie).
Soit $F \subseteq E$ fermé. Soit $f \in \mathcal{C}^0(F, F)$ une application contractante (*id est* k-lipschitzienne avec $k < 1$). Alors f admet un unique point fixe dans F.

Démonstration.
◁ Unicité : si $f(x) = x$ et $f(y) = y$, $\|x - y\| < k\|x - y\|$ avec $k < 1$ donc $\|x - y\| = 0$ et $x = y$.

◁ Existence : Soit $x_0 \in F$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x_{n+1} = f(x_n) \in F$.
On va montrer que la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente donc convergente.
Pour $n \geqslant 1$, $\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\|$. Par récurrence rapide on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n \|x_1 - x_0\|$$

Comme $k < 1$, (k^n) converge donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ converge donc par complétude, $\sum x_{n+1} - x_n$ converge et donc (x_n) converge.
Soit $z = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Par continuité de f, $z = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(z)$. Ainsi z est un point fixe de f.

D) Théorème de Baire ⋆⋆

Théorème 6.7.9

Soit E un espace vectoriel normé complet.
Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de E, alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \text{ est dense dans } E$$

Démonstration. Soit $a \in E$. Soit $r > 0$. On montre que $B(a,r) \cap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \neq \varnothing$.

- ◅ Par densité de Ω_0, $B(a,r) \cap \Omega_0 \neq \varnothing$.
  Soit $x_0 \in B(a,r) \cap \Omega_0$ ouvert donc on dispose de $r_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subseteq B(a,r) \cap \Omega_0$ (quitte à prendre $\frac{r_0}{2}$).
- ◅ Comme Ω_1 est dense, on prend $x_1 \in \Omega_1 \cap B(x_0, r_0) \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_0 \cap B(a,r)$.
  Quitte à prendre r_1 plus petit, on demande $r_1 < \frac{r_0}{2}$.
- ◅ Supposons construits $x_0, \dots, x_n$ et $r_0, \dots, r_n$ tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\overline{B}(x_k, r_k) \subseteq \bigcap_{j=0}^{k} \Omega_j \cap B(a,r)$$

  et $\overline{B}(x_k, r_k) \subseteq B(x_{k-1}, r_{k-1})$ et $r_k < \frac{r_0}{2^k}$.
  Par densité de Ω_{n+1}, on dispose de $x_{n+1} \in \Omega_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ ouvert. Donc on dispose de $0 < r_{n+1} \leqslant \frac{r_n}{2} \leqslant \frac{r_0}{2^{n+1}}$ tel que :

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap \Omega_{n+1} \subseteq \bigcap_{j=0}^{n+1} \Omega_j \cap B(a,r)$$

- ◅ Si E est complet, on remarque que (x_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, soit N tel que $\frac{r_0}{2^{N+1}} < \varepsilon$.
  Pour tout $p \geqslant N$, $q \geqslant N$, $x_p, x_q \in B(x_N, r_N)$ donc $\|x_p - x_q\| < 2r_N < \varepsilon$.
  Comme E est complet, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Or pour $k \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n\geqslant k} \in \overline{B}(x_k, r_k)^{\mathbb{N}}$ qui est fermée.
  D'où $x \in \overline{B}(x_k, r_k) \subseteq \left(\bigcap\limits_{j=0}^{k} \Omega_j\right) \cap B(a,r)$. Finalement,

$$x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j \cap B(a,r)$$

◁ Si E est de dimension finie, $(\overline{B}(x_n, r_n))$ est une suite décroissante de compacts non-vides. Alors par la Proposition 6.2.2,

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \cap B(a, r)$$

VIII) Convexité

A) Définitions et connexité par arcs

Définition 6.8.1

$A \subseteq E$ est convexe si pour $(a, b) \in A^2$,

$$[a\,,b] = \{(1-t)a + tb, t \in [0\,,1]\} \subseteq A$$

On rappelle que, comme vu au Théorème **3.6.6**,

Théorème 6.8.2

A est convexe *si et seulement si* il est stable par barycentre à coefficients positifs.

Proposition 6.8.3

Une partie convexe est connexe par arcs.

Démonstration. Pour $(a, b) \in A^2$, le chemin naturel $\gamma : t \mapsto (1-t)a + tb$ convient.

Nous avons donc établi :

$$\text{Convexe} \subsetneq \text{Connexe par arcs} \subsetneq \text{Connexe}$$

B) Théorème de Gauss-Lucas ⋆⋆⋆⋆

Théorème 6.8.4

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de P.

Démonstration. Déja vue au Théorème 3.6.7

C) Théorème de Carathéodory ⋆⋆

Théorème 6.8.5

Toute combinaison linéaire convexe (à coefficients positifs et de somme égale à 1) peut s'écrire comme combinaison linéaire convexe de $n+1$ vecteurs de E.

Démonstration. Considérons $x = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j a_j$ où $\lambda_j \geqslant 0$ et $a_j \in A$, $\sum_{j=0}^{m} \lambda_j = 1$ et $m \geqslant n = 1$.
Les vecteurs $(a_j - a_0)_{j\in[\![1\,,m]\!]}$ sont liés (car $m \geqslant n+1$).
On dispose ainsi de $(\alpha_j)_{j\in[\![1\,,m]\!]} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\}$ tel que,

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j (a_j - a_0) = 0$$

En posant $\alpha_0 = -\sum_{j=1}^{m} \alpha_j$, $\sum_{j=0}^{m} \alpha_j a_j = 0$ et $\sum_{j=0}^{m} \alpha_j = 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $x = \sum_{j=0}^{m} (\underbrace{\lambda_j - t\alpha_j}_{=\mu_{j,t}}) a_j$.
On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $i_0 \in [\![0\,,m]\!]$, $\mu_{i_0,t} = 0$ et pour $i \neq i_0$, $\mu_{i,t} \geqslant 0$.
Les ensembles $\{j, \alpha_j > 0\}$ et $\{j, \alpha_j < 0\}$ sont non-vides.
On pose $t_0 = \min\left\{\frac{\lambda_j}{\alpha_j}, j \in [\![0\,,m]\!], \alpha_j > 0\right\} \geqslant 0$. Soit $j \in [\![0\,,m]\!]$.

- ◅ Si $\alpha_j \leqslant 0$, $\lambda_j - t_0\alpha_j \geqslant \lambda_j \geqslant 0$
- ◅ Si $\alpha_j > 0$, $\frac{\lambda_j}{\alpha_j} \geqslant t_0$ d'où $\lambda_j - t_0\alpha_j \geqslant 0$. Soit alors j_0 tel que $t_0 = \frac{\lambda_{j_0}}{\alpha_{j_0}}$. Ainsi $\lambda_{j_0} - t_0\alpha_{j_0} = 0$.

Corollaire 6.8.6

Ainsi, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Conv}(A) = \left\{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j a_j, (a_0, \ldots, a_n) \in A^{n+1}, (\lambda_j) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1\right\}$$

D) Compacité de l'enveloppe convexe d'un compact ⋆⋆

Théorème 6.8.7: Existence et caractérisation de l'enveloppe convexe

Pour $B \subseteq E$, il existe une plus petite partie convexe contenant B. C'est l'intersection de toutes les parties convexes contenant B. On l'appelle *enveloppe convexe*, notée $\mathrm{Conv}(B)$.
$\mathrm{Conv}(B)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de B.

Proposition 6.8.8

Soit K un compact. Alors $\mathrm{Conv}(K)$ est compacte.

Démonstration. Considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C} \times K^{n+1} & \longrightarrow & \mathrm{Conv}(K) \\ ((\lambda_0, \dots, \lambda_n), (a_0, \dots, a_n)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j a_j \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \displaystyle\sum_{j=0}^{n} x_j = 1 \right\}$.

- ◅ $\mathcal{C}$ est compact : On montre que $\mathcal{C}$ est fermé borné en dimension finie. D'une part, $\mathcal{C} \subseteq [0,1]^{n+1}$ donc $\mathcal{C}$ est bornée.
  D'autre part, $\mathcal{C} = \displaystyle\bigcap_{j=0}^{n} \theta_j^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap s^{-1}(\{1\})$ où

$$\theta_j : (x_0, \dots, x_n) \mapsto x_j \text{ et } s : (x_0, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=0}^{n} x_j$$

  continues car linéaires en dimension finie. Ainsi $\mathcal{C}$ est fermé.
- ◅ On en déduit que $\mathcal{C} \times K^{n+1}$ est compact donc $\mathrm{Conv}(K) = \varphi(\mathcal{C} \times K^{n+1})$ est compacte, comme image d'un compact par une application continue.

Chapitre 7

Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, on considère E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit A une partie de E.
On étudie les fonctions de A dans F, ensemble noté $\mathcal{F}(A,F)$. Dans la pratique, on a généralement $E = F = \mathbb{R}$.

I) Rappels de cours ⋆⋆⋆⋆

A) Modes de convergence

A.1 Définitions

Définition 7.1.1: Pour une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$. On dit que :

- (f_n) converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(A,F)$ sur A si $\forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.
- (f_n) converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}(A,F)$ si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

La convergence uniforme peut se reformuler avec la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Définition 7.1.2: Pour une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$. On dit que :

- $\sum f_n$ converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(A,F)$ sur A si $\forall x \in A, \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.
- $\sum f_n$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}(A,F)$ sur A si $\left\| \sum_{k=0}^{n} f_k - f \right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $\sum f_n$ converge normalement sur A si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge simplement.

On a les implications suivantes :

Théorème 7.1.3: Force des modes de convergence

CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS

A.2 Montrer la non-convergence uniforme

Dire qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément veut dire que :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, \exists x_n \in A, \|f_n(x_n) - f(x_n)\| \geqslant \varepsilon$$
$$\iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \|f_n(x_n) - f(x_n)\| \text{ ne tend pas vers } 0$$

Il s'agit du phénomène de la "bosse-glissante".

Pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas, il suffit de trouver une suite (x_n) telle que $(\|f_n(x_n) - f(x_n)\|)$ ne tende pas vers 0.

Exemple 7.1.4

On considère la suite de fonctions définie pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{cases} \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\sin^2(nt)}{n\sin(t)} \end{cases} \quad \text{et } f_n(0) = 0$$

qui est bien une suite de fonctions continues.

- (f_n) converge simplement vers la fonction nulle car pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{n|\sin t|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Néanmoins, avec $(x_n)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$, on a

$$\|f_n\|_\infty \geqslant |f_n(x_n)| = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \sim \frac{2}{\pi}$$

Il n'y a donc pas convergence uniforme.

B) Suites de fonctions

B.1 Continuité

Proposition 7.1.5: Propriétés conservées par convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(A,F)$. Alors :

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_i nfty \leqslant M$, alors $\|f\|_\infty \leqslant M$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est k-lipschitzienne, alors f est k-lipschitzienne.
- Si $E = F = \mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est croissante, alors f est croissante.

- ◁ Si $E = F = \mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est décroissante, alors f est décroissante.
- ◁ Si $E = F = \mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est convexe, alors f est convexe.
- ◁ Si $E = F = \mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est concave, alors f est concave.

ATTENTION ! La continuité n'est pas préservée par convergence simple. Par exemple, $f_n : t \mapsto t^n$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers $t \mapsto \delta_{t=1}$ qui n'est pas continue.

La bonne compatibilité avec la continuité est la convergence uniforme :

Théorème 7.1.6: Préservation de la continuité par convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(A,F)$. Si :

- ◁ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a.
- ◁ (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage (relatif) de A.

Alors f est continue en a.

Corollaire 7.1.7: Corollaires utilisés en pratique

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(A,F)$. Alors :

- ◁ Si les (f_n) sont continues sur A et que (f_n) converge uniformément sur A, f est continue sur A.
- ◁ Si les (f_n) sont continues sur A et que (f_n) converge uniformément au voisinage de tout $a \in A$, f est continue sur A.
- ◁ Si $A = I$ un intervalle, que les (f_n) sont continues sur I et que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I, f est continue sur I.

Attention, la convergence uniforme sur tout segment de I n'implique pas la convergence uniforme sur tout I.

B.2 Interversions

Théorème 7.1.8: Double limite

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que :

- ◁ (f_n) converge simplement vers f sur A.
- ◁ (f_n) converge uniformément au voisinage de a.
- ◁ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$

Alors :

- ◁ $(l_n) \in F^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in F$.
- ◁ $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

On utilise souvent la contraposée de ce théorème pour montrer la non-convergence uniforme. En effet si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$ mais que f n'admet pas de limite en a, on n'a pas CVU au voisinage de a.

Théorème 7.1.9: Convergence uniforme et intégration

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f.
Soit $a \in I$. On définit

$$F_n : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \quad \text{et } F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.

Attention encore, la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ n'implique pas celle sur $\mathbb{R}$. Pour cette raison, si (f_n) est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, cela ne veut pas dire que (F_n) l'est aussi nécessairement.

B.3 $\mathcal{C}^k, k \geqslant 1$

Théorème 7.1.10: $\mathcal{C}^1$ pour le suites de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- (f_n) converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
- (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers g.

Alors :

- (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f.
- $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ et $f' = g$

Théorème 7.1.11: $\mathcal{C}^k$ pour le suites de fonctions

Soit $k \geqslant 1$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- (f_n) converge simplement sur I vers $f = f_0 \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
- Pour tout $j \in [\![1\,,k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I vers f_j.
- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers f_k.

Alors :

- Pour tout $j \in [\![0\,,k]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge uniformément sur tout segment de I.
- $f_0 = f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ et pour tout $j \in [\![0\,,k]\!]$, $f^{(j)} = f_j$

C) Séries de fonctions

Exercice 3

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{n^x} \end{array} \right.$. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur R_+^*. Montrer qu'on a convergence uniforme sur tout intervalle $[a\,, +\infty[$.

Dans toute la suite du chapitre, on note :

$$\eta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{array} \right. \quad \text{et } \zeta : \left\{ \begin{array}{ccc}]1\,, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

Exercice 4

Montrer qu'on a convergence normale de ζ sur tout intervalle $[a\,, +\infty[$.

C.1 Continuité

Théorème 7.1.12: Préservation de la continuité pour les séries

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(A, F)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum f_n$ converge simplement sur A vers $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$.
Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A **ou** sur tout compact de A **ou** au voisinage de tout point de A, alors S est continue sur A.

Théorème 7.1.13: Préservation de la continuité pour les séries, version intervalle

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(I, F)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum f_n$ converge simplement sur I vers $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$.
Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I **ou** sur tout segment de I **ou** au voisinage de tout point de I, alors S est continue sur I.

Exercice 5

Montrer que η et ζ sont continues sur leur ensemble de définition.

C.2 Interversions

Théorème 7.1.14: Double limite

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum f_n$ converge simplement sur A vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty}$.

Soit $a \in \overline{A}$. On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$
- $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage relatif de a.

Alors : $\sum \ell_n$ converge et $S(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Exercice 6

Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \eta(x)$.

Théorème 7.1.15: Intégration sur un segment

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum f_n$ converge unformément sur tout segment vers S.
On note $F_n : x \longmapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment vers $\tilde{S} : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

C.3 $\mathcal{C}^k, k \geqslant 1$

Théorème 7.1.16: $\mathcal{C}^k$ pour le séries de fonctions

Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- Pour tout $j \in [\![1\,, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement vers S_j sur I.
- $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément vers S_k sur tout segment de I.

Alors :

- Pour tout $j \in [\![0\,, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I.
- $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$
- Pour tout $j \in [\![0\,, k]\!]$, $S_0^{(j)} = S_j = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Exercice 7

Montrer que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1\,,+\infty[$.

II) Approximation uniforme et conséquences

A) Fonctions en escalier ⋆⋆⋆

Proposition 7.2.1: Densité des fonctions en escalier dans les fonctions continues

$\mathrm{Esc}\left([a\,,b]\,,F\right)$ est dense dans $\mathcal{C}^0\left([a\,,b]\,,F\right)$ pour la norme infinie $||.||_{\infty,[a\,,b]}$.

Démonstration. Voir la Proposition **2.1.5**.

En voici la principale conséquence :

Lemme 7.2.2: Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{K})$, avec f intégrable sur I.
Alors

$$\int_I f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$$

Démonstration. Voir le Lemme **2.2.3**.

B) Fonctions polynomiales ⋆⋆⋆⋆

Théorème 7.2.3: Weierstrass

L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a\,,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a\,,b]\,,\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration. Hors-programme, voir le Théorème **??** pour une démonstration avec les polynômes de Bernstein.

Proposition 7.2.4

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)t^n\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Démonstration. ◅ Par linéarité de l'intégrale, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)P(t) = 0$.

◅ Soit $\varepsilon > 0$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{(b-a)\max(1, \|f\|_\infty)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)(f(t) - P(t))\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^b |f(t)| \frac{\varepsilon}{(b-a)\max(1, \|f\|_\infty)}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc comme $f^2 \geqslant 0$ et continue, $f^2 = 0$ donc $f = 0$.

Attention néanmoins voici une variante de l'exercice précédent :

Proposition 7.2.5

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in [\![0\,,d-1]\!]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)t^n\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $(d+1)$ fois.

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que f s'annule moins de d fois : on note $a_1, \ldots, a_k$ les points où f s'annule en changeant de signe.

On pose $P = \displaystyle\prod_{j=1}^{k}(X - a_j)$. L'application $t \mapsto f(t)P(t)$ ne change pas de signe sur $[a\,,b]$.

Comme $\deg P \leqslant d$, par hypothèse, $\displaystyle\int_a^b f(t)P(t) = 0$ impossible.

Et enfin, cet exercice permet de se rappeler que : **les théorèmes d'approximation uniforme sont compatibles avec l'intégration**. En effet, intégrer premet de gagner en régularité ; alors que dériver nous fait perdre des propriétés importantes.

Proposition 7.2.6

Soit $E = \mathcal{C}^1([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ muni de $N : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \end{array}\right.$. Les fonctions polynomiales sont denses dans E pour la norme N.

Démonstration. Soit $f \in E$. Alors f' est continue de $[a\,,b]$ dans $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de Weierstrass, on dispose d'une suite (P_n) d'applications polynomiales telles que $\|f' - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On pose $Q_n : \left\{\begin{array}{ccc} [a\,,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(a) + \displaystyle\int_a^x P_n(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$ polynomiale.

Comme (P_n) converge uniformément sur le segment $[a\,,b]$ vers f', on sait que $\left(x \mapsto \int_a^x P_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge uniformément sur $[a\,,b]$ vers $\left(x \mapsto \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Ainsi (Q_n) converge uniformément sur le segment $[a\,,b]$ vers $x \mapsto f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$

Ainsi $N(Q_n - f) = \|Q_n - f\|_\infty + \left\|P_n - f'\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

III) Méthodes de développements asymptotiques ⋆⋆⋆

A) $f_n(x) \underset{x\to a}{\sim} \alpha_n g(x)$ avec $\sum \alpha_n$ qui converge

Considérons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

◅ Convergence : Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3x^2}$ terme général d'une série convergente.

Pour $x = 0$, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Donc $\sum f_n$ converge sur $\mathbb{R}^*$.

◅ Limite en $+\infty$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

$\sup\limits_{x\in[1\,,+\infty[} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n(1+n^2)} \sim \dfrac{1}{n^3}$ terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum \sup|f_n(x)|$ converge ; *id est* $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1\,,+\infty[$.

Le théorème d'interversion des limites s'applique :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

◅ Equivalent en $+\infty$: On conjecture $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}\zeta(3)$ car $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3x^2}$. On montre ainsi que $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \zeta(3)$.

$x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{n\left(\frac{1}{x^2}+n^2\right)}}_{=g_n(x)}$. Pour tout $n \geqslant 1$, $g_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{n^3}$.

Pour tout $x \in [1\,,+\infty[$, $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$ terme général d'une série convergente donc $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1\,,+\infty[$.

Le théorème de la double limite s'applique :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)$$

On a bien $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\zeta(3)}{x^2}$.

B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = o_{x\to a}(f_0(x))$

Exercice 8

Montrer que $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

Trouvons maintenant un équivalent de $\zeta(x) - 1$.

◁ $\zeta(x)-1 = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrons que $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2^x}\right)$. On étudie donc $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^x}}_{=h_n(x)}$.

◁ Pour tout $n \geqslant 3$, $\dfrac{n}{2} > 1$ donc $h_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\displaystyle\sup_{x\in[2,+\infty[} |h_n(x)| = \sup_{x\in[2,+\infty[} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^x} = \frac{4}{n^2}$ terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum h_n$ converge normalement donc uniformément sur un voisinage de l'infini.

Le théorème de la double limite s'applique et $2^x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ainsi $\zeta(x) = 1 + \dfrac{1}{2^x} + o_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^x}\right)$.

C) Comparaison série-intégrale

On se place dans le cas où à x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante positive.

Traitons l'exemple de f : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n}{1+x^n}}_{=f_n(x)} \end{array}\right.$.

◁ Convergence : Pour $x > 1$, on a divergence grossière ; pour $x = 1$, $\sum \dfrac{1}{2}$ diverge ; et pour $x < 1$, $f_n(x) \sim x^n$ terme général d'une série convergente.
Ainsi f est bien définie sur $[0\,,1[$.

◁ Limite en 1^- : Soit $x \in [0\,,1[$.
$f_n(x) = \dfrac{1}{x^{-n}+1} = \dfrac{1}{e^{-n\ln(x)}+1}$ décroissante en n pour x fixé (car $-\ln(x) > 0$).
Posons $u = -\ln x$ et $g_u(t) = \dfrac{1}{e^{tu}+1}$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour $n \geqslant 1$,

$$\int_n^{n+1} g_u(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g_u(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_u(t)\,\mathrm{d}t$$

avec la minoration aussi valable pour $n \geqslant 0$. On somme, par relation de Chasles, avec la convergence des intégrales,

$$\int_0^{infty} g_u(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} g_u(n) \leqslant g_u(0) + \int_0^{+\infty} g_u(t)\,\mathrm{d}t$$

id est

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{tu}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{tu}}$$

Mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{tu}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tu}}{1+e^{-tu}}\,\mathrm{d}t \left[-\frac{1}{u}\ln(1+e^{-tu})\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln 2}{u}$.
Finalement,

$$-\frac{\ln 2}{\ln x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{\ln x}$$

D'où $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{-\ln 2}{\ln x} \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{\ln 2}{1-x}$.

D) $\sum(-1)^n f_n(x)$ série alternée à x fixé

On considère $\sum(-1)^n f_n(x)$ où à x fixé, la série vérifie les hypothèses du Théorème des séries alternées (TSA).

Considérons $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.

◁ Convergence : Pour $x \geqslant 0$, $\left(\dfrac{1}{n+x}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, positive et tend vers 0. Par le TSA, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

◁ Equivalent en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \overbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2k+x} - \frac{1}{2k+1+x}\right)}_{=h_x(k)\geqslant 0}}^{=g(x)}$$

$h_x(k) = \dfrac{1}{(2k+x)(2k+1+x)}$ est décroissante en k. Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} h_x(k) \leqslant \int_0^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t+x} - \frac{1}{2t+1+x}\right)\mathrm{d}t \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2t+x} - \frac{1}{2t+1+x}\right)\mathrm{d}t$$

En primitivant,

$$\ln\left(\frac{2+x}{3+x}\right) \leqslant g(x) \leqslant \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Mais $\ln\left(\dfrac{2+x}{3+x}\right) = -\ln\left(1+\dfrac{1}{3+x}\right) = -\dfrac{1}{3+x} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
et $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = -\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
D'où $g(x) = \dfrac{1}{2x} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Finalement :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2x}$$

IV) Convergence uniforme et equicontinuité

A) Définition ⋆⋆

Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie, et A une partie de E.

Définition 7.4.1: Equicontinuité

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{F}(A,F)$. On dit que $\mathcal{A}$ est équicontinue en $x \in A$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{A}, \forall y \in A, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est équicontinue sur A si elle est équicontinue en tout point x de I.

Définition 7.4.2: Uniforme équicontinuité

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{F}(A,F)$. On dit que $\mathcal{A}$ est uniformément-équicontinue (sur A) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{A}, \forall (x,y) \in A^2, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Soit désormais I un intervalle de $\mathbb{R}$.

De la sorte, on dira par abus de langage qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$:

- est équicontinue en x (resp. sur I) si $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue en x (resp. sur I) ;
- est uniformément équicontinue sur I si $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément équicontinue sur I ;

B) Préservation de la continuité à la limite pour une suite de fonctions équicontinues ⋆⋆

Proposition 7.4.3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers f sur I.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue en $a \in I$, alors f est continue en a.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par équicontinuité, on dispose de $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(a)\| \leqslant \varepsilon$$

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \delta$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x) - f_n(a)\| \leqslant \varepsilon$ donc par convergence simple en x et conservation des inégalités larges par passage à la limite :

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi f est continue en a.

Proposition 7.4.4

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers f sur I.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément-équicontinue sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et δ le module d'uniforme-équicontinuité associé. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $|x - y| \leqslant \delta$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon$.
Par convergence simple en x et y et passage à la limite : $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

C) Equivalence entre la convergence uniforme et l'équicontinuité ⋆⋆

Proposition 7.4.5

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}^0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$.
Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par Heine, f est uniformément continue sur $[a\,,b]$ donc on dispose de $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I, |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Par ailleurs, par convergence uniforme, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $n \geqslant N$ et $x \in I$, $|x - y| \leqslant \delta$. Alors,

$$|f_n(x) - f(x)| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{3} \text{ par CVU}} + \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{3} \text{ par } \mathcal{C}^0} + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{3} \text{ par CVU}}$$

Et ainsi $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
De plus pour $k \in [\![0\,, n-1]\!]$, f_k est uniformément continue sur le segment $[a\,,b]$ donc on dispose de $\delta_k > 0$, module d'uniforme continuité pour ε.
On pose $\eta = \min(\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}) > 0$. Un tel η convient pour tout $f_n, n \in \mathbb{N}$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc équicontinue.

Proposition 7.4.6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite uniformément équicontinue de fonctions définies sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers $f \in \mathcal{C}^0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$.
Alors la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on dispose de $\delta > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

De plus par la Proposition 7.4.4, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
On munit $[a\,,b]$ de la subdivision uniforme $(\sigma_k)_{k\in[\![0\,,n]\!]} = \left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)_{k\in[\![0\,,n]\!]}$ avec $p(\sigma) = \dfrac{b-a}{n} < \delta$.
On utilise la convergence simple aux points $(\sigma_k)_{k\in[\![0\,,n]\!]}$: on dispose de $N_k \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \geqslant N_k, |f_n(\sigma_k) - f(\sigma_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $N = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} N_k$. Pour $n \geqslant N$, on trouve $k = k_x \in [\![0\,,n]\!]$ tel que $|x - \sigma_k| \leqslant \delta$,

$$|f_n(x) - f(x)| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \underbrace{|f_n(\sigma_k) - f_n(x)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{3} \text{ car par } \mathcal{C}^0} + \underbrace{|f_n(\sigma_k) - f(\sigma_k)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{3} \text{ par CVS en } \sigma_k} + \underbrace{|f(\sigma_k) - f(x)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{3}} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $\forall n \geqslant N$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

D) Théorème d'Ascoli ⋆

Définition 7.4.7: Compacité relative

Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte.

Théorème 7.4.8: Ascoli

Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit K un compact. Soit $E = (\mathcal{C}^0(K,F), \|\cdot\|_\infty)$ et $\mathcal{A} \subset E$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{A}$ est relativement compacte.
- Pour tout $x \in K$, $\begin{cases} \mathcal{A} \text{ est équicontinue en } x \\ \mathcal{A}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{A}\} \subseteq F \text{ est relativement compacte.} \end{cases}$.

Démonstration. Attention s'accrocher ! Cette démonstration regroupe un ensemble de techniques classiques d'analyse réelle (extraction diagonale, précompacité, séparabilité...).

- $\Rightarrow$: Supposons que $\mathcal{A}$ est relativement compacte.
  - $\mathcal{A}$ est précompacte : Par l'absurde, supposons que $\mathcal{A}$ n'est pas précompacte. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on peut construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tous $p \neq q$,
  $$\|f_p - f_q\| \geqslant \varepsilon$$
  ,par la même méthode qu'au Lemme 6.2.6.
  Mais dans ce cas, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$ et n'a pas de suite extraite convergente. Alors, $\overline{\mathcal{A}}$ n'est pas compacte, et $\mathcal{A}$ n'est pas relativement compacte : c'est impossible.

— $\mathcal{A}$ est équicontinue sur I : Soit $\varepsilon > 0$. On dispose, par précompacité de $\mathcal{A}$, de $p \in \mathbb{N}^*$ et de $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{A}$ tels que

$$\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} B\left(f_j, \frac{\varepsilon}{3}\right) (\star)$$

D'après le théorème de HEINE, comme les $f_1, \dots, f_p$ sont continues sur K compact, elles y sont uniformément continues. On dispose donc pour $j \in [\![1\,, p]\!]$, de $\eta_j > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in K^2, \|x - y\| < \eta_j \Longrightarrow \|f_j(x) - f_j(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

On pose $\delta = \min_{j \in [\![1\,, p]\!]} \eta_j > 0$.
Montrons maintenant qu'à ε fixé, ce δ convient pour toutes les $f \in \mathcal{A}$. Soit donc $f \in \mathcal{A}$.
Par $(\star)$, on trouve $k \in [\![1\,, p]\!]$ tel que $\|f - f_k\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Alors, pour $x, y \in K$ tels que $\|x - y\| < \delta$,

$$\|f(x) - f(y)\| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \|f(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f_k(y)\| + \|f_k(y) - f(x)\| < \varepsilon$$

Cela conclut l'équicontinuité de $\mathcal{A}$ sur K.

— Soit $x \in K$. $\mathcal{A}(x)$ est relativement compacte : soit $x \in \mathbb{K}$. Notons

$$\varphi_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(K, F) & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

de sorte à ce que $\mathcal{A}(x) = \varphi_x(\mathcal{A})$. On montre alors que $\overline{\varphi_x(\mathcal{A})}$, qui est un fermé, est inclus dans le compact $\varphi_x(\overline{\mathcal{A}})$.
D'une part c'est bien un compact, comme image d'un compact par une application continue. En effet φ_x est continue car pour $f \in \mathcal{C}^0(K, F)$, $\|f(x)\| \leqslant \|f\|_\infty$.
D'autre part il est évident que $\overline{\varphi_x(\mathcal{A})} \subseteq \varphi_x(\overline{\mathcal{A}})$.
Ainsi $\overline{\mathcal{A}(x)} = \overline{\varphi_x(\mathcal{A})}$ est compact, donc $\mathcal{A}(x)$ est relativement compacte.

◅ $\Longleftarrow$: On suppose que pour tout $x \in K$, $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ est équicontinue en } x \\ \mathcal{A}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{A}\} \subseteq F \text{ est relativement compacte.} \end{array} \right.$

Il s'agit de montrer que toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ a une sous-suite extraite qui converge vers $g \in \mathcal{C}^0(K, F)$.
L'idée est que K est séparable, c'est à dire qu'il contient une partie au plus dénombrable et dense dans K.
Par exemple, $\mathbb{R}$ est séparable car il contient $\mathbb{Q}$. On montre par exemple à l'aide de ceci que tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.

— Il existe $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ une partie dense au plus dénombrable dans K : K est compact donc précompact. En appliquant la précompacité avec $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_{n,1}, \dots, x_{n,d_n}) \in K^{\mathbb{N}_{d_n}}, K \subseteq \bigcup_{j=1}^{d_n} B\left(x_{n,j}, \frac{1}{n}\right)$$

Ainsi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x_{n,j}, j \in [\![1\,, d_n]\!]\} = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans K. De plus c'est une partie au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis.

— Il existe ψ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(f_{\psi(n)}(a_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $g(a_k)$:
On construit l'extractrice par récurrence sur k.
Pour $k = 0$, la suite $(f_n(a_0))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}(a_0)^{\mathbb{N}}$ est bornée car $\mathcal{A}(a_0)$ est relativement compacte. Donc, F étant de dimension finie, on peut en extraire une sous-suite convergente. Soit donc φ_0 une extractrice telle que :

$$f_{\varphi_0(n)}(a_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(a_0)$$

Supposons construits $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ des extractrices telles que pour $j \in [\![0\,, k]\!]$,

$$f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j(n)}(a_j) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(a_j)$$

La suite $\left(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(a_{k+1})\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}(a_{k+1})^{\mathbb{N}}$ est bornée. Donc par le même raisonnement, on dispose d'une extractrice φ_{k+1} telle que

$$f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_{k+1}(n)}(a_{k+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(a_{k+1})$$

Finalement, on pose

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) \end{array} \right.$$

C'est une extractrice : en effet si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \psi(n+1) &= \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_{n+1}(n+1) \\ &\geqslant \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1) \text{ car } \varphi_{n+1} \geqslant \mathrm{id} \\ &> \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) \text{ par stricte croissance de } \varphi_n \\ &= \psi(n) \end{aligned}$$

On a donc, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$f_{\psi(n)}(a_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(a_k)$$

A ce jour nous avons donc défini une application $g : \mathcal{D} = \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \longmapsto F$, avec $\mathcal{D}$ dense dans K.

— $\forall x \in K, \left(f_{\psi(n)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $g(x)$: en fait, on prolonge g à tout K.
On sait que pour $x \in K$, $\left(f_{\psi(n)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car elle est à valeurs dans $\mathcal{A}(x)$ relativement compact. On montre donc qu'elle admet une unique valeur d'adhérence.
Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est équicontinue sur un compact donc uniformémément équicontinue. Donc on dispose de $\eta > 0$,

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall n \in \mathbb{N}, \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|a_k - x\| < \eta$, ce qui est possible par densité de $\mathcal{D}$ dans K.
Avec un tel k, la suite $\left(f_{\psi(n)}(a_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(a_k)$. La suite est donc de Cauchy. On dispose donc de $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p, q \geqslant N, \left\|f_{\psi(p)}(a_k) - f_{\psi(q)}(a_k)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi, pour $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$,

$$\begin{aligned}\left\|f_{\psi(p)}(x) - f_{\psi(q)}(x)\right\| &\overset{\text{IT}}{\leqslant} \left\|f_{\psi(p)}(x) - f_{\psi(p)}(a_k)\right\| + \left\|f_{\psi(p)}(a_k) - f_{\psi(q)}(a_k)\right\| \\ &\quad + \left\|f_{\psi(q)}(a_k) - f_{\psi(q)}(x)\right\| \\ &< \varepsilon \text{ car } \|a_k - x\| < \eta\end{aligned}$$

Ainsi, si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux valeurs d'adhérence de $\left(f_{\psi(n)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \|\ell_1 - \ell_2\| < \varepsilon$$

Ce qui montre $\ell_1 = \ell_2$. Finalement, pour tout $x \in K$, $\left(f_{\psi(n)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(x) \in F$.

— g est continue : Soit $x \in K$, montrons que g est continue en x.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ le module d'uniforme équicontinuité de $\mathcal{A}$, donc de tous les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout $y \in K$, si $\|x - y\| < \eta$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(n)}(y)\right\| \leqslant \varepsilon$$

Par convergence simple en x et en y,

$$\|g(x) - g(y)\| \leqslant \varepsilon (\star)$$

, ce qui conclut.

— $\left\|f_{\psi(n)} - g\right\|$ tend vers 0 : argument très classique, qui consiste à subdiviser l'intervalle en portions suffisamment fines, et appliquer la convergence simple et la continuité en ces points.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ le module d'uniforme équicontinuité des éléments de $\mathcal{A}$, on a montré en $(\star)$ qu'il convenait aussi pour g.
Par précompacité de K en η, on dispose de $p \in \mathbb{N}^*$ et de $(z_1, \ldots, z_p) \in K^p$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} B(z_j, \eta)$$

Comme la suite $\left(f_{\psi(n)}(z_j)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dispose de $N_j \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_j$,

$$\left\|f_{\psi(n)}(z_j) - g(z_j)\right\| \leqslant \varepsilon$$

Pour tout $n \geqslant N_0 = \max_{j\in[\![1,p]\!]} N_j$, pour tout $x \in K$, on choisit z_j tel que $\|z_j - x\| < \eta$, alors :

$$\left\|f_{\psi(n)}(x) - g(x)\right\| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \left\|f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(n)}(z_j)\right\| + \left\|f_{\psi(n)}(z_j) - g(z_j)\right\| + \|g(z_j) - g(x)\| \leqslant 3\varepsilon$$

Finalement, pour tout $n \geqslant N_0$, $\left\|f_{\psi(n)} - g\right\|_\infty \leqslant 3\varepsilon$.

Cela prouve l'existence d'une valeur d'adhérence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^0(K, F)$, et conclut la preuve du sens réciproque.

V) Théorèmes de Dini ⋆⋆

Théorème 7.5.1: Premier théorème de Dini

Soit K un compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$.
- Pour tout $x \in K$, $(f_n(x))$ est croissante (ou décroissante).

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Démonstration.

- On pose $g_n = f - f_n$ si $\forall x \in K, (f_n(x))_n$ est croissante. Sinon, on pose $g_n = f_n - f$.
  Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n \geqslant 0$ sur K. Et pour tout $x \in K$, $(g_n(x))_n$ est décroissante continue sur K.
- On montre que $\|g_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- On rappelle que, comme vu à la Proposition **6.2.2**, Soit (L_n) une suite décroissante de compacts non-vides de E. Alors :
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n \neq \varnothing$$
- On applique ce lemme avec $L_k = g_k^{-1}([\varepsilon\,,+\infty[)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. L_k est fermé car g_k est continue et $[\varepsilon\,,+\infty[$ est fermé. Ainsi, L_k est compact car K est compact.
  De plus pour tout $x \in L_{k+1}, g_k(x) \geqslant g_{k+1}(x) \geqslant \varepsilon$ d'où $L_{k+1} \subseteq L_k$. On en déduit que si les (L_k) sont non-vides,
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n \neq \varnothing$$
- Or, on montre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n = \varnothing$: si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n$, pour $k \in \mathbb{N}$, $g_k(x) \geqslant \varepsilon$. Or par hypothèse, $g_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$: c'est impossible. Ainsi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n = \varnothing$.
- Ainsi par contraposée du Lemme précédent, on dispose de $k \in \mathbb{N}$, $L_k = \varnothing$. Ceci se traduit par le fait que :
$$\forall x \in K, 0 \leqslant g_k(x) < \varepsilon$$
  Par décroissance, pour $n \geqslant k$,
$$\|g_n\|_\infty = \sup_{x\in K} g_k(x) < \varepsilon$$
- Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Théorème 7.5.2: Deuxième théorème de Dini

Soit $K = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante (ou décroissante).

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas croissant.
Soit $\varepsilon > 0$. f est uniformément continue sur K d'après le théorème de Heine. Soit donc $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in K^2, |x-y| < \delta, |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On munit $[a\,,b]$ de la subdivision uniforme $(\sigma_k)_{k\in[\![0\,,n]\!]} = \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)_{k\in[\![0\,,n]\!]}$ avec $p(\sigma) = \frac{b-a}{n} < \delta$.
On utilise la convergence simple aux points $(\sigma_k)_{k\in[\![0\,,n]\!]}$: on dispose de $N_k \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \geqslant N_k, |f_n(\sigma_k) - f(\sigma_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N = \max_{k\in[\![0\,,n]\!]} N_k$. Soit $n \geqslant N$. Pour tout $x \in K$, on dispose de $k \in [\![0\,, n-1]\!]$ tel que $x \in [\sigma_k\,, \sigma_{k+1}]$,

$$\underbrace{f_n(\sigma_k) - f(a_k)}_{\geqslant -\frac{\varepsilon}{2} \text{ car } n\geqslant N_k} + \underbrace{f(a_k) - f(x)}_{\geqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } |\sigma_k - x| < \delta} \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \underbrace{f_n(a_{k+1}) - f(a_{k+1})}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } n\geqslant N_{k+1}} + \underbrace{f(a_{k+1}) - f(x)}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } |a_{k+1} - x| < \delta}$$

Finalement, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. D'où pour $n \geqslant N$, $\|f_n - f\| < \varepsilon$.

Chapitre 8

Intégrales à paramètres

I) Rappels des théorèmes essentiels

Ce chapitre contient beaucoup de points de cours et de théorèmes à connaître parfaitement. Voici donc une liste des théorèmes à connaître :

A) Théorèmes d'interversion de Lebesgue

Théorème 8.1.1: Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose :

- (f_n) converge simplement vers f sur I.
- f est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ sur I.
- Il existe $\varphi \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I,\mathbb{R}_+)$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors les (f_n) et f sont intégrables sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 8.1.2: Théorème d'intégration terme-à-terme

Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I. On note $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- f est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n intégrable sur I et $\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 8.1.3: Théorème d'intégration terme-à-terme pour les fonctions positives

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I,\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement vers f $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$.

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Ainsi f est intégrable sur I *si et seulement si* $\sum_n \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Théorème 8.1.4: Théorème de convergence dominée version continue

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{A}$ (éventuellement $+\infty$) ou $A \subseteq E$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in \overline{A}$.
Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in A} \in \left(\mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I,\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose :

- $\forall t \in I,\ f_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda\to a]{} f(a)$
- f $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ sur I.
- Il existe V voisinage de a, il existe $\varphi \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I,\mathbb{R}_+)$ intégrable, tels que

$$\forall \lambda \in V, \forall t \in I, |f_\lambda(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors les $(f_\lambda)_{\lambda\in V}$ et f sont intégrables sur I et

$$\lim_{\lambda\to a} \int_I f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

B) Intégrales à paramètres

Théorème 8.1.5: Théroème de continuité des intégrales à paramètres

Soit $f : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{cases}$ où $A \subseteq E$ un espace vectoriel normé, I intervalle de $\mathbb{R}$.
On suppose :

- $\forall t \in I,\ x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A.
- $\forall x \in A,\ t \longmapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ sur I.
- $\forall K$ compact $\subseteq A$, il existe $\varphi_K \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I,\mathbb{R}_+)$ intégrable sur I, $\forall x \in K$, $\forall t \in I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors : $G : \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est bien définie et $\mathcal{C}^0$ sur A.

Théorème 8.1.6: Théorème $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$.

On suppose :

- $\forall x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur I.
- $\forall t \in I$, $x \longmapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{K})$.
- $\forall x \in A$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$.
- $\forall K$ segment $\subseteq A$, il existe $\varphi_K \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur I, $\forall x \in A$, $\forall t \in I$, $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t)$.

Alors $G : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est définie et $\mathcal{C}^1$ sur A.

De plus $G' : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle G'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

Théorème 8.1.7: Théorème $\mathcal{C}^k$ des intégrables à paramètres

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$.

On suppose :

- $\forall t \in I, x \longmapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^k(A, \mathbb{K})$.
- $\forall x \in A, t \longmapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur I.
- $\forall x \in A, t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ sur I.
- $\forall K$ segment $\subseteq A$, il existe $\varphi_K \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur I, telle que

$$\forall x \in K, \forall t \in I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi_K(t)$$

Alors $G : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est définie et $\mathcal{C}^k$ sur A, et pour $j \in [\![0\,, k]\!]$,

$$G^{(j)} : \longmapsto \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

II) Intégrales classiques

A) Un calcul de l'intégrale de Dirichlet

Définition 8.2.1: Fonction intermédiaire

On définit pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Démonstration. On prouve la bonne définition sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x,t)| = \left| e^{-xt} \dfrac{\sin t}{t} \right| \leqslant e^{-xt}$ qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $x = 0$, $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, néanmoins $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ converge (cf. Proposition **2.1.15**).

Proposition 8.2.2: Caractère $\mathcal{C}^1$, calcul de F' sur R_+^*

F est $\mathcal{C}^1$ sur R_+^*. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$

Démonstration. On applique le théorème $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, t \longmapsto e^{-xt} \dfrac{\sin t}{t}$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto e^{-xt} \dfrac{\sin t}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt} \sin(t)$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$.
- Soit $a > 0$. Pour tout $x \in]a, +\infty]$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant e^{-at} = \varphi_a(t) \text{ continue par morceaux et intégrable}$$

Le théorème $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres d'applique : F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-xt} \sin(t) \, \mathrm{d}t$.
Pour le calcul, on passe par les complexes :

$$F'(x) = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xt+\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t \right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} \right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

Proposition 8.2.3: Calcul de F sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$$

Démonstration. ◁ Montrons que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t} = 0$

$\forall x \in [1\,,+\infty[\,, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \left|e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}\right| \leqslant e^{-t} = \varphi(t)$ $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable.

Par TCVD, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$

◁ Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$.

Théorème 8.2.4: Valeur de $F(0)$ et intégrale de Dirichlet

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. ◁ On montre que F est continue en 0. On fait une IPP puis théorème de continuité.

$$F(x) = \underbrace{\int_0^1 e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}_{=F_1(x)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}_{F_2(x)}$$

◁ $\underline{F_1 \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$: le théorème $\mathcal{C}^0$ des intégrales à paramètres s'applique avec la domination :

$$\forall x \in [0\,,1]\,, \forall t \in\,]0\,,1]\,, \left|e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\right| \leqslant 1 = \varphi(t) \text{ intégrable sur } \,]0\,,1]$$

◁ $\underline{F_2 \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$: Pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d} &= \operatorname{Im}\left(\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt+\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-x+\mathrm{i})t}}{-x+\mathrm{i}}\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} - \frac{1}{x-\mathrm{i}}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-(x-\mathrm{i})t}}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Or $\left|\dfrac{e^{(-x+\mathrm{i})t}}{-x+\mathrm{i}}\dfrac{1}{t}\right| \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2+1}}\dfrac{\mathrm{i}}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$

D'où $F_2(x) = \operatorname{Im}\left(\underbrace{\dfrac{e^{-x+\mathrm{i}}}{x-\mathrm{i}} - \dfrac{1}{x-\mathrm{i}}}_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)}\underbrace{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-(x-\mathrm{i})t}}{t^2}\,\mathrm{d}t}_{H(x)}\right)$ De plus par le théorème de conti-

nuité des intégrales à paramètres, H est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\left|\frac{e^{-(x-\mathrm{i})t}}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2} = \varphi(t)$$

qui est $\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}$, intégrable sur $[1\,,+\infty[$.

◁ d'où F $\mathcal{C}^0$ et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

B) Etude de Γ

Définition 8.2.5: Fonction Γ

On pose

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc}]0\,,+\infty[& \longrightarrow & R_+ \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Γ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. ◁ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $\mathcal{C}^0$ sur R_+^*.

◁ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

◁ Soit $K = [a\,,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in [a\,,b]\,, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \left|t^{x-1}e^{-t}\right| \leqslant \varphi_K(t) = \left\{ \begin{array}{lll} t^{a-1}e^{-t} & \text{si} & t \in [0\,,1] \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si} & t \in]1\,,+\infty[\end{array} \right.$ continue par morceaux.

— $\varphi_K(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-a}}$ avec $1-a<1$ car $a>0$ d'où φ_K intégrable sur $]0\,,1]$.

— $\varphi_K(t) = o_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $t^{b-1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{}$ d'où φ_K intégrable sur $[1\,,+\infty[$.

Le théorème s'applique, et on a la bonne définition et la continuité souhaitées.

Théorème 8.2.6: Caractère $\mathcal{C}^\infty$

$$\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

◁ Soit $j \in [\![0\,,k-1]\!]$. $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) = (\ln t)^j t^{x-1}e^{-t}$. On veut montrer que $t \longmapsto (\ln t)^j t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Comme $x>0$, $1-x<1$, on pose $\gamma \in]1-x\,,1[$.

$t^\gamma(\ln t)^j t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} (\ln t)^j t^{\underset{>0}{\gamma-(1-x)}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

d'où $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) = o_{t\to 0^+}\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$ donc intégrable sur $[0\,,1]$ puisque $\gamma<1$.

— Sur $[1,+\infty[$, $t^2\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. D'où $t \longmapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

◁ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

◁ $\forall x, t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$.

◁ Soit $K=[a,b]$.

$\forall \in K, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_K(t) = \begin{cases} |\ln t|^k t^{a-1}e^{-t} & \text{si} \quad t \in]0,1] \\ |\ln t|^k t^{b-1}e^{-t} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$

On montre comme précédemment que φ_K est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètres s'applique et $\Gamma \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donc $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \Gamma^{(j)} : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^j t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

C) Calcul de l'intégrale de Gauss

Définition 8.2.7

Soit

$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Soit $f : (x,u) \longmapsto \dfrac{e^{-xu^2}}{1+u^2}$.

◁ $u \longmapsto f(x,u)$ et $x \longmapsto f(x,u)$ sont continues sur les intervalles considérés.

◁ Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{e^{-xu^2}}{1+u^2}\right| \leqslant \varphi(u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{u^2} & \text{si} \quad u > 1 \end{cases}$, intégrable et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Lemme 8.2.8: Caractère $\mathcal{C}^1$

$$F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{u^2}{1+u^2}e^{-xu^2}\,\mathrm{d}u$$

Démonstration. On vérifie toutes les hypothèses du théorème $\mathcal{C}^1$, en dominant par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & \max(1, e^{-bu^2}) \end{cases}$$

On obtient F $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{u^2}{1+u^2} e^{-xu^2} \, \mathrm{d}u$$

Lemme 8.2.9

$$F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Démonstration. On applique le théorème de convergence dominée, avec le même φ que précédemment.

Théorème 8.2.10: Intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} -\frac{u^2}{1+u^2} e^{-xu^2} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xu^2} \, \mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x}} + F(x) \text{ CDV } u = \frac{t}{\sqrt{x}} \\ F'(x) &= F(x) - \frac{C}{\sqrt{x}}, \text{ avec } C = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi $e^{-x}F(x) = -C \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t + F(0) = -2C \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u + \frac{\pi}{2}$

d'où comme $e^{-x}F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, $2C^2 = \frac{\pi}{2}$ et $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

III) Transformation de Fourier

Définition 8.3.1: Transformation de Fourier

Soit f $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$T(f) : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}t$$

Démonstration. ◁ $\forall t \in \mathbb{R}, x \longmapsto f(t)e^{\mathrm{i}xt}$ est continue.
$\forall x \in \mathbb{R}, t \longmapsto f(t)e^{\mathrm{i}xt}$ est $\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \left|f(t)e^{\mathrm{i}xt}\right| = |f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

◁ Le théorème $Co0$ s'applique et $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

◁ Par le lemme de RIEMANN-LEBESGUE (**2.2.3**), $T(f)(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$

Proposition 8.3.2

Supposons $t \longmapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et

$$T(f')(x) = -\mathrm{i}xT(f)(x)$$

Démonstration. ◁ On applique le théorème $\mathcal{C}^1$ en dominant par $\varphi(t) = tf(t)$, $T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et

$$T(f)' : x \longmapsto \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} tf(t)e^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t$$

◁ On suppose f $\mathcal{C}^1$ et f et f' intégrable sur $\mathbb{R}$.
Exprimons $T(f')$ en fonction de $T(f)$.
On souhaite réaliser une IPP :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, T(f')(x) &= \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[f(t)e^{\mathrm{i}xt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \mathrm{i}x\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty} f'$ converge, f a une limite de $+\infty$, et comme $\int_0^{+\infty} f$ converge, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ de même.
Donc le crochet est nul et $T(f')(x) = -\mathrm{i}xT(f)(x)$.

Corollaire 8.3.3

Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N}, t^k f(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N}, \left|t^k f(t)\right| \text{ bornée}\}\end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{S}$, alors $T(f) \in \mathcal{S}$.

Démonstration. Récurrence avec le théorème $\mathcal{C}^k$.

Chapitre 9

Séries entières

I) Techniques de calcul de sommes

Outre les techniques très classiques (reconnaître une somme géométrique par exemple), proposons ici des méthodes plus élaborées qui doivent faire partie de votre "plan de réflexion" lorsque vous souhaitez calculer la somme d'une série entière.

A) Changement de variables ⋆⋆⋆⋆

Exemple 9.1.1: Calcul de somme

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \end{array} \right.$. Exprimons $f(x)$.

- ◅ Si $x \geqslant 0$, $x = t^2$ donne $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$.
- ◅ Si $x < 0$, $x = -s^2$ et de même $f(x) = \cos(\sqrt{|x|})$.
- ◅ On vérifie par ailleurs que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple 9.1.2: Astuce pour montrer le caractère $\mathcal{C}^\infty$

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin(\sqrt{|x|})}{\sqrt{|x|}} & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$. Montrons que g est $\mathcal{C}^\infty$.

- ◅ Pour $x \geqslant 0$, $\mathrm{sh}(\sqrt{x}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.
- ◅ Pour $x < 0$, $\sin(\sqrt{|x|}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{\sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!}}{=} \sqrt{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-x)^n}{(2n+1)!}$.

Ainsi $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$

◁ Finalement g est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

B) Reconnaître la primitive ou la dérivée d'un DSE connu ⋆⋆⋆⋆

Exemple 9.1.3: Binôme négatif

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n$.

◁ D'après la règle de D'ALEMBERT, $R_{CV} = 1$.

◁ On remarque ensuite que si $f_0 : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \end{array} \right.$, $f = f_0^{(k)}$.

◁ Ainsi, $f : x \longmapsto \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

De façon générale :

◁ Si $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ connue, alors

$$h(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

◁ Si $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ connue, alors

$$g(x) = x f'(x)$$

C) Décomposition en éléments simples ⋆⋆⋆⋆

Exemple 9.1.4

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$.

Par d'Alembert, $R_{CV} = 1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x_n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-x\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

continue sur $]-1\,,1[$.

D) Nombre de dérangements ⋆⋆⋆

Définition 9.1.5: Dérangements

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0\,,n]\!]$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $[\![1\,,n]\!]$ ayant k points fixes.
On dit que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un dérangement si c'est une permutation sans point fixe.
On note $d_n = D_{n,0}$ le nombre de dérangements de $[\![1\,,n]\!]$.

On a $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, et on pose $d_0 = 0$ par convention.

Proposition 9.1.6: Relation de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$$

Démonstration. **Importante**.
Pour construire un dérangement à $n+1$ éléments, il y a deux possibilités :

- Soit on prend un dérangement à n éléments et on transpose l'élément $n+1$ avec l'un des n éléments. Il y a d_n dérangement possibles et n façons de choisir l'élément à transposer avec l'élément $n+1$.
- Soit on prend une permutation à n éléments ayant un unique point fixe i et on transpose l'élément i et $n+1$. Il y a n façons de choisir l'élément fixe et d_{n-1} dérangements possible pour le reste. Dit autrement, il y a nd_{n-1} permutations à un seul élément fixe.

Lemme 9.1.7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in [\![0, n]\!]$, $D_{n,k} = d_{n-k}$ et

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

Démonstration. On note A_k l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant k points fixes. Alors les ensembles $A_0, \dots, A_n$ sont disjoints et leur réunion est $\mathfrak{S}_n$. Alors,

$$n! = \sum_{k=0}^{n} |A_k|$$

Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a :

- $\binom{n}{k}$ choix possibles pour ces k points fixes ;
- ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants, il y a $D_{n-k,0}$ telles permutations.

Ainsi, $|A_k| = D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0} = \binom{n}{k} d_{n-k}$. Finalement

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

Théorème 9.1.8: Expression explicite du nombre de dérangements

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Démonstration. Considérons la série entière $\sum \frac{d_n}{n!} z^n$. Son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1 par comparaison avec la série géométrique (car $d_n \leqslant n!$).

Notons alors $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. Considérons alors le produit de Cauchy suivant, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\exp(x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!k!} x^n$$

D'après le Lemme précédent, $\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = 1$. On obtient :

$$\exp(x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Ainsi, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. De même par produit de Cauchy,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^n$$

Par identification, il vient

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

II) Rayon de convergence

A) Subtilités de la règle de d'Alembert ⋆⋆⋆⋆

Rappel 9.2.1

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $(a_n)_{n \geqslant N_0} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ et si $\left(\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \geqslant N_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $\dfrac{1}{\ell}$.

Il faut néanmoins prendre garde aux séries lacunaires. Par exemple, si pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} \neq 0$, $a_{2n+1} = 0$ et $\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, on ne peut pas appliquer d'Alembert.

Exercice 9

Montrer que dans le cas précédent, le rayon de convergence est de $\dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$.

Lemme 9.2.2

Supposons que $R_{CV}\left(\sum a_{2n} z^{2n}\right) = R_1$ et $R_{CV}\left(\sum a_{2n+1} z^{2n+1}\right) = R_2$. Alors :

$$R_{CV}\left(\sum a_n z^n\right) = \min(R_1, R_2)$$

Démonstration. Par théorème sur les sommes de séries entières, $R_a \geqslant \min(R_1, R_2)$. Soit $r > \min(R_1, R_2)$. Par exemple, $r > R_1$.
Alors $(a_{2n} r^{2n})$ est non-bornée et à fortiori $(a_n r^n)$ non plus. D'où $r > R_a$. Finalement, $R_a = \min(R_1, R_2)$.

B) Théorème radial d'Abel et théorèmes taubériens ⋆⋆⋆⋆

Rappel 9.2.3: Théorème radial

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note R le rayon de convergence > 0 de la série entière associée.
On note $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$.
Supposons que $\sum a_n R^n$ converge. Alors, $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,R]$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to R^-} f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ et f est prolongeable par continuité sur $[0,R]$.

Proposition 9.2.4: Application à un faux produit de Cauchy

Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, telles que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. On note $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On suppose que $\sum c_n$ converge.
Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

Démonstration. On ne peut pas appliquer le théorème usuel sur les produits de Cauchy, car on n'a pas convergence absolue.
On a $R_a, R_b, R_c \geqslant 1$ par hypothèse. On note f, g, h les sommes associées sur $]-1,1[$.
Comme $R_a, R_b \geqslant 1$, pour $x \in]-1,1[$, $h(x) = f(x)g(x)$ $(\star)$.
Comme $\sum a_n$ converge, par théorème radial d'Abel, $f(x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. De même pour les deux autres séries : $g(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ et $h(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.
On prend la limite dans $(\star)$ et on conclut.

Notons désormais que la réciproque du théorème radial est fausse : si f est continue en R, cela n'implique pas en général que $\sum a_n R^n$ converge. Un contre-exemple est :

$$a_n = (-1)^n$$

En effet, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \xrightarrow[z \to 1^-]{} \frac{1}{2}$ mais la série $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement.
On peut néanmoins donner une réciproque partielle au théorème d'Abel.

Théorème 9.2.5: Théorème taubérien faible

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. On suppose que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, et que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} S$.

Alors, $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0\,,1[$. Notons (S_n) les sommes partielles de (a_n).

$$\begin{aligned}
|S_n - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \\
&\overset{\text{IT}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,(1-x)\underbrace{\sum_{j=0}^{k}|x|^j}_{\leqslant k} + \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(ka_k)\frac{x^k}{k}\right| \\
&\leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sup_{k>n}(k\,|a_k|)\frac{|x|^k}{n} \text{ car } k>n \\
&\leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \frac{\sup_{k>n}(k\,|a_k|)}{n}\sum_{k=n+1}^{} |x|^k \\
&\leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \frac{\sup_{k>n}(k\,|a_k|)}{n}\times\frac{\overbrace{1-|x|^n}^{\leqslant 1}}{1-|x|} \\
&\leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \frac{\sup_{k>n}(k\,|a_k|)}{n(1-x)} \text{ car } 1-|x| = |1-x| = 1-x
\end{aligned}$$

Ainsi en appliquant ceci avec $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, on a :

$$\left|S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \sup_{k>n}(k\,|a_k|)$$

Mais $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc pour $\varepsilon > 0$, on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geqslant n_0$,

$$k\,|a_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier $\sup_{k>n_0} k\,|a_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour $n \geqslant n_0$,

$$\left|S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Mais comme $k\,|a_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, par Césàro, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc on dispose de $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour $n \geqslant n_1$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$,

$$\left|S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc $S_n - f\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et comme $f\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$, on a :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$$

d'où le résultat.

En réalité, ce théorème est vrai avec un $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, il s'agit du théorème de Tauber fort.

C) Comportement au bord du disque ouvert de convergence ⋆⋆⋆⋆

Complément le plus important en séries entières.

Lemme 9.2.6

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose $R_a = 1$ et $\sum a_n$ divergente.
Alors, $f(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$.

Démonstration. Soit $M > 0$. Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \geqslant 2M$.

Or pour $x \in [0\,,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ par positivité des (a_n).

Or $\lim\limits_{x\to1_-} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n \geqslant 2M > 0$. Donc on dispose de $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in [1-\delta\,,1[$, $f(x) \geqslant M$. Cela montre, par définition de la limite, le résultat voulu.

Théorème 9.2.7: Comportement en $R = 1$

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose $R_a = 1$ et $\sum a_n$ divergente.

◅ Si $b_n = o(a_n)$, alors $R_b \geqslant 1$ et si

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right. \quad \text{et } g : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \end{array} \right.$$

Alors $g(x) = o_{x\to 1_-}(f(x))$.

◅ Si $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, alors $R_b = 1$ et $g(x) \underset{x\to 1_-}{\sim} f(x)$.

Démonstration. On traite seulement le premier cas, le deuxième s'en déduit immédiatement.
Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$|b_n| \leqslant \varepsilon |a_n| = \varepsilon a_n$$

Pour tout $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leqslant \left| \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right| \leqslant \left| \sum_{n=0}^{N-1} b_n x^n \right| + \sum_{n=N}^{+\infty} \underbrace{|b_n|}_{\leqslant \varepsilon a_n} x^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |b_n| + \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n \\ &\leqslant C + \varepsilon f(x) \text{ comme } f(x) \xrightarrow[x\to 1_-]{} +\infty \end{aligned}$$

On dispose de $0 < \delta < 1$, tel que pour tout $x \in [1-\delta, 1[$, $f(x) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |b_n|$. Alors pour un tel x,

$$|g(x)| \leqslant 2\varepsilon f(x)$$

Exercice 10: Application

Trouver un équivalent de $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n) x^n$ en 1_-.

Parfois, (a_n) est lacunaire ou n'a pas de limite. L'équivalent obtenu par ce théorème n'est donc pas facilement calculable. Il existe néanmoins une variante, plus précise lorsque la suite des moyennes de Césàro converge.

Proposition 9.2.8: Très classique

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On suppose $R_a = 1$ et $\sum a_n$ divergente, mais

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Alors, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{\ell}{1-x}$.

Démonstration. Notons (S_n) les sommes partielles de (a_n).

◁ Montrons tout d'abord que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \frac{f(x)}{1-x}$ (avec un rayon de convergence $\geqslant 1$)

Posons $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \text{ où } (b_n)_n = (1)_n$$

Or $R_a = 1$ et $R_{CV}\left(\sum 1 z^n\right) = 1$. Donc $R_{CV}\left(\sum S_n z^n\right) \geqslant 1$. Pour tout $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \frac{f(z)}{1-z}$$

◁ Or, $S_n = (n+1)\sigma_n = (n+1)\ell + o(n+1)$ avec $\sum n+1$ qui diverge. Par le théorème précédent,

$$\frac{f(x)}{1-x} = g(x) = \frac{\ell}{(1-x)^2} + o\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

On en conclut l'équivalent recherché pour $f(x)$.

III) Holomorphie

Lemme 9.3.1: Translation de DSE

Soit f développable en série entière sur $\mathbb{D}(0,R)$. Alors f est développable en série entière en tout point de $\mathbb{D}(0,R)$.

Démonstration. Notons R le rayon de convergence (en 0) de f. Soit $z_0 \in \mathbb{D}(0,R)$. Alors pour $r = R - |z_0| > 0$,

$$\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq \mathbb{D}(0,R)$$

Soit $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$. Alors soit $h = z - z_0$ de module $|h| < r$. Par hypothèse,

$$f : \begin{cases} \mathbb{D}(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n z_0^k h^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} \right)}_{=b_n} h^k \text{ par Fubini} \end{aligned}$$

Cela conclut.

A) Formule de Cauchy et applications ⋆⋆⋆

Théorème 9.3.2: Formule de Cauchy

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{D}(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$, avec $R_a \geqslant R$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $r \in [0\,, R[$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta}) e^{-\mathrm{i}n\theta} \,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} a_n r^n & \text{si } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta}) e^{-\mathrm{i}\theta n} \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{a_k e^{\mathrm{i}(k-n)\theta} r^k}_{=\varphi_k(\theta)} \,\mathrm{d}\theta$$

On va intervertir.

- ◅ Méthode 1 : intégration terme-à-terme.
  On a bien la convergence simple de la somme.
  La somme est continue donc continue par morceaux sur $[0\,, 2\pi]$.
  $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| a_k e^{\mathrm{i}(k-n)\theta} r^k \right| \,\mathrm{d}\theta = 2\pi \,|a_k|\, r^k$ est le terme général d'une série convergente (comme $r < R_a$).
- ◅ Méthode 2 : par convergence uniforme.
  $\displaystyle\sup_{\theta \in [0\,, 2\pi]} |\varphi_k(\theta)| = |a_k|\, r^k$ est le terme général d'une série convergente donc $\sum \varphi_k$ converge normalement donc uniformémément sur $[0\,, 2\pi]$.

Finalement,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}\theta n}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k r^k}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{=2\pi\delta_{k,n}}$$

Ce qui fournit le résultat.

Proposition 9.3.3: Une conséquence rigide

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ développable en série entière en 0. Notons $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$ de rayon de convergence infini.
Si $f(z) = \mathcal{O}_{|z|\to+\infty}(z^N)$, alors f est polynomiale de degré $\leqslant N$.

En particulier si on suppose f bornée, f est constante.

Démonstration. Soit $n \geqslant N+1$. Pour $r \geqslant A$:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi r^n}\left|\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} Mr^N 1\,\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \frac{M}{r^{n-N}} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc pour $n > N$, $a_n = 0$ et f est polynomiale de degré $\leqslant N$.

Proposition 9.3.4: Autre propriété de rigidité

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{D}(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$ avec $R_a \geqslant R$. Alors :

- ◅ Si $|f(0)|$ est un maximum local de $|f|$ alors f est constante.
- ◅ Plus généralement, si $|f|$ admet un maximum sur $\mathbb{D}(0,R)$, f est constante.

Démonstration. ◅ Supposons que $|f(0)|$ est un maximum local de $|f|$.
Soit $0 < \delta < R$ tel que pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}(0,\delta), |f(z)| \leqslant |f(0)|$. Pour tout $r \in [0\,,\delta]$,

$$\begin{aligned} |a_0| = |f(0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta\right| \\ &\overset{(1)}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{\mathrm{i}\theta})\right|\,\mathrm{d}\theta \\ &\overset{(2)}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|a_0|\,\mathrm{d}\theta = |a_0| \end{aligned}$$

Ainsi (1) et (2) sont des égalités.
Comme (1) est une égalité, pour $r \in [0\,,\delta]$, $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$ prend ses valeurs sur une demi-droite issue de 0 et elle est de module constant égal à a_0.
Ainsi, f est constante sur $\overline{\mathbb{D}(0,R)}$ et par unicité du DSE, f est constante sur $\mathbb{D}(0,R)$.

◅ Supposons désormais que $|f|$ admet un maximum en $z_0 \in \mathbb{D}(0,R)$.
Soit $r = R - |z_0|$. On a déjà montré que $\varphi_{z_0} : z \longmapsto f(z_0+z)$ est DSE sur $\mathbb{D}(0,r)$.
De plus $|\varphi_{z_0}|$ admet un maximum en 0. D'après le point précédent,

$$\varphi_{z_0} \text{ est constante sur } \mathbb{D}(0,r)$$

C'est-à-dire que f est constante sur $\mathbb{D}(z_0,r)$.
Il reste à montrer que f est constante sur tout le disque $\mathbb{D}(0,R)$.
Posons $\Omega = f^{-1}(\{f(z_0)\}) \subseteq \mathbb{D}(0,R)$ est un fermé par continuité de f, mais c'est aussi un ouvert. En effet si $z_1 \in \Omega$, $|f(z_1)| = |f(z_0)| = \max\limits_{\mathbb{D}(0,R)} |f|$ donc on dispose de $r_1 > 0$, $f = f(z_0)$ sur $\mathbb{D}(0,r_1)$.
Ω est donc ouvert et fermé non-vide dans $\mathbb{D}(0,R)$ connexe par arcs donc connexe d'après le Théorème 6.4.6. Ainsi, $\Omega = \mathbb{D}(0,R)$.

B) Intégrale sur un cercle et applications ⋆⋆

Théorème 9.3.5: Intégration sur un cercle

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{D}(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$. Soit $r < R$. Pour tout $z \in \mathbb{D}(0,r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} re^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

Démonstration. Il s'agit de nouveau d'un problème d'interversion série / intégrale.
Soit $r < R$ et $z \in \mathbb{D}(0,r)$. On a $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$ d'où

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{r} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - \frac{z}{r}e^{-i\theta}} re^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{f(re^{i\theta}) \left(\frac{z}{r} e^{-i\theta}\right)^n}_{=\varphi_n(\theta)}\, \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

f est continue sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ donc bornée par $\|f\|_{\infty,r}$.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{\theta \in [0\,,2\pi]} |\varphi_n(\theta)| = \|f\|_{\infty,r} \left|\frac{z}{r}\right|^n \text{ t.g. d'une série CV}$$

D'onc $\sum \varphi_n$ converge normalement et uniformément sur $[0\,,2\pi]$ et

$$I(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{=a_n z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z)$$

Proposition 9.3.6: Une caractérisation des fonctions DSE

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ développable en série entière sur $\mathbb{D}(0,R)$. Supposons que pour tout $r<R$, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ vers f. Alors, f est développable en série entière.

Démonstration. Soit $0<r<R$ et $z\in\mathbb{D}(0,r)$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{f_n(re^{\mathrm{i}\theta})re^{\mathrm{i}\theta})}{re^{\mathrm{i}\theta})-z}}_{=g_n(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ $(\star)$.

Par hypothèse, (g_n) converge uniformément sur $[0\,,2\pi]$ vers $g:\theta\longmapsto \frac{f(re^{\mathrm{i}\theta})re^{\mathrm{i}\theta})}{re^{\mathrm{i}\theta})-z}$. On en déduit que :

$$\int_0^{2\pi} g_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Ainsi par limite dans $(\star)$,

$$\forall z\in\mathbb{D}(0,r), f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{\mathrm{i}\theta})}{re^{\mathrm{i}\theta}-z} re^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Comme f est continue sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ (comme limite uniforme de fonctions continues), l'interversion ci-dessus s'applique de nouveau et :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta\right] z^n$$

et f est DSE.

Proposition 9.3.7: Composée de fonctions DSE

Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{D}(0,R_0)$.
Soit g une fonction développable en série entière sur $\mathbb{D}(0,R)\subseteq\mathbb{D}(0,R_0)$.
Alors $f\circ g$ est développable en série entière sur $\mathbb{D}(0,R)$.

Démonstration. Pour tout $z\in\mathbb{D}(0,R)$, comme $g(z)\in\mathbb{D}(0,R_0)$,

$$f\circ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (g(z))^n$$

Par produit de CAUCHY, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n = g \times \cdots \times g$ est DSE sur $\mathbb{D}(0,R)$. Par combinaison linéaire, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k g^k$ est DSE.
De plus, $f \circ g$ est limite simple quand $n \to +\infty$ de S_n. Il reste donc, d'après la proposition précédente, à montrer la convergence uniforme de (S_n) sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ avec $r < R$. Soit donc $r < R$.
Posons $\rho = \sup_{\overline{\mathbb{D}}(0,r)} |g|$, atteint par continuité de g sur le compact $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$. De plus, $g(\overline{\mathbb{D}}(0,r)) \subseteq \overline{\mathbb{D}}(0,R_0)$ donc $\rho < R_0$.
Or, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}(0,\rho)$ (car $\rho < R_0$), donc

$$\sup_{z \in \mathbb{D}(0,r)} |a_n (g(z))^n| = |a_n| \, \rho^n$$

et $\sum |a_n| \, \rho^n$ converge. Ainsi, $\sum a_n g^n$ converge normalement donc uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$, et (S_n) converge ainsi uniformément sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$. On conclut.

IV) Compléments divers

A) Caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ par majoration des dérivées ⋆⋆

Théorème 9.4.1: CNS pour que f soit DSE

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière en 0 *si et seulement si* il existe $(a,M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et un voisinage V de 0 tels que

$$\forall x \in V, \forall n \in \mathbb{N}, \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M a^n n!$$

Démonstration. $\Leftarrow$: Supposons qu'on dispose de $(a,M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et d'un voisinage V de 0 tels que

$$\forall x \in V, \forall n \in \mathbb{N}, \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M a^n n!$$

Soit $\delta > 0$ maximal tel que $]-\delta, \delta[\subseteq V$. Par inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in]-\delta,\delta[} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \\ &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M a^{n+1} (n+1)! = (|x| \, a)^{n+1} M \end{aligned}$$

Ainsi pour $|x| < \min\left(\delta, \frac{1}{a}\right)$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

$\Rightarrow$: Supposons f DSE. Soit $\delta > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall x \in]-\delta, \delta[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $R_a \geqslant \delta > 0$.

Par définition de R_a, $\left(a_n \left(\frac{\delta}{2}\right)^n\right)_n$ est bornée. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^n M$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \left]-\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4}\right[$,

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(x)\right| &= \left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}\right| \\
&\overset{\text{IT}}{\leqslant} M \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k| \frac{k!}{(k-n)!} |x|^{k-n} \\
&\leqslant M \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{2}{\delta}|x|\right)^{k-n} \\
&\leqslant Mn! \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \frac{1}{\left(1-\left(\frac{2}{\delta}|x|\right)\right)^{n+1}} \\
&\leqslant Mn! \left(\frac{2}{\delta}\right)^n 2^{n+1} = 2Mn! \left(\frac{4}{\delta}\right)^n
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

B) Principe des zéros isolés ⋆

Théorème 9.4.2: Principe des zéros isolés

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{D}(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$ non-nulle avec $R > 0$ le rayon de convergence.

Si on dispose de $z_0 \in \mathbb{D}(0,R)$ tel que $f(z_0) = 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_0, \delta) \subseteq \mathbb{D}(0,R)$ et $f_{|\mathbb{D}(z_0,\delta)}$ ne s'annule qu'en z_0.

Démonstration. Pour $r = R - |z_0| \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{D}(0,r) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longmapsto & f(z_0+h) \end{cases} \text{ est DSE}$$

On a $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n h^n$.

◁ Soit $N = \min\{n \in \mathbb{N}^*, b_n \neq 0\}$. Justifions l'existence d'un tel N.
Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$. Alors $\tilde{f}$ est nulle sur $\mathbb{D}(0,r)$, $f = 0$ sur $\mathbb{D}(z_0, r)$.
On montre maintenant que f est nulle sur $\mathbb{D}(0,R)$.

— Si $0 \in \mathbb{D}(z_0, r)$, alors par unicité du DSE, $f = 0$.

— Sinon, on pose $z_1 = z_0 - \frac{r}{2}\frac{z_0}{|z_0|}$ et $r_1 = R - |z_1| = \frac{3}{2}r$. D'une telle manière, $z_1 \in \mathbb{D}(z_0, r)$ et donc f est nulle au voisinage de z_1. Par le même argument, $f = 0$ sur $\mathbb{D}(z_1, r_1)$.

— On construit une suite strictement croissante $r_k = \left(\frac{3}{2}\right)^k r$ et une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}(z_0, r)^{\mathbb{N}}$.

En un nombre fini d'étapes, on a $0 \in \mathbb{D}(z_k, r_k)$ et donc $f = 0$, absurde.

◁ Soit donc un tel N. Alors

$$\begin{aligned}\tilde{f}(h) &= b_N h^N + h^{N+1} \sum_{k=N+1}^{+\infty} b_k h^{(k-(N+1))} \\ &= h^N(\underbrace{b_N}_{\neq 0} + \varepsilon(h)) \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0\end{aligned}$$

Alors, on dispose de $\delta > 0$ tel que $b_N + \varepsilon(h) \neq 0$ pour $h \in \mathbb{D}(0, \delta)$.

◁ Ainsi, sur $\mathbb{D}(0, \delta)$, $\tilde{f}$ ne s'annule qu'en 0. Sur $\mathbb{D}(z_0, \delta)$, f ne s'annule qu'en z_0.

Corollaire 9.4.3: Finitude des zéros sur un disque fermé

Soit f développable en série entière non-identiquement nulle, de rayon de convergence $R > 0$.
Soit $r < R$, alors f a un nombre fini de zéros sur $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$.

Démonstration. Si f a un nombre infini de zéros dans $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$, on note (x_n) ces zéros deux-à-deux distincts.
Cetet suite est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on extrait (z_n) de (x_n) qui converge vers $z_\infty \in \overline{\mathbb{D}}(0, r) \subseteq \mathbb{D}(0, R)$.
Alors par continuité de f, $f(z_\infty) = 0$. Mais par principe des zéros isolés, on trouve $\delta > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}(z_0, \delta)\backslash\{z_0\}$. Cela contredit le fait que (z_∞) est une valeur d'adhérence de (x_n).

Chapitre 10

Probabilités

I) Lois usuelles ⋆⋆⋆⋆

Loi	Situation-type	X	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X=k)$	Espérance	Variance	$G_X(t)$
Uniforme	Tirage équiprobable d'un entier de $[\![1,n]\!]$	$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$[\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{t}{n}\cdot\frac{t^n-1}{t-1}$
Bernoulli	Mesure d'un succès de probabilité p	$\mathcal{B}(p)$	$[\![0,1]\!]$	$\mathbb{P}(X=1)=p$	p	$p(1-p)=pq$	$pt+q$
Binomiale	Mesure du nombre de succès de probabilité p dans la succession de n expériences identiques **indépendantes**	$\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	np	npq	$(pt+q)^n$
Géométrique	Mesure du temps d'attente d'un premier succès de probabilité p dans une succession d'expériences identiques **indépendantes**	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$q^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pt}{1-qt}$
Poisson	Loi des événements rares (phénomènes de comptage (nombre de clients...))	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(t-1))$

Avec $p\in]0,1[$ $(q=1-p)$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $\lambda>0$

II) Espérance

On considère $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

A) Lemmes de Borel-Cantelli ⋆⋆⋆

Définition 10.2.1: Limite supérieure

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On appelle "limite supérieure de (A_n)" l'évènement :

$$B = \limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k \right) = \{\omega \in \Omega, \omega \text{ est dans une infinité de } A_k\}$$

Il est évident que $B = \limsup A_n \in \mathcal{T}$, pourquoi ?

Lemme 10.2.2: Borel-Cantelli faible

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$.
Si $\sum \mathbb{P}(A_k)$ converge, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

Démonstration. On pose $B_n = \bigcup_{k\geqslant n} A_k$. (B_n) est décroissante donc par continuité décroissante des probabilités, $\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Or, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k \right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Lemme 10.2.3: Borel-Cantelli fort

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$.
Si $\sum \mathbb{P}(A_k)$ diverge et que les (A_k) sont indépendants, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Démonstration. On montre que $\mathbb{P}(\overline{B}) = 0$. $\overline{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}}_{C_n}$.

Par indépendance des $(A_k)_k$, pour tout $N \geqslant n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k} \right) = \prod_{k=n}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_k})$$

Par continuité décroissante, on fait tendre $N \to +\infty$,

$$\mathbb{P}(C_n) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k} \right) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=n}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

Or, $x \mapsto e^{-x}$ est convexe donc $e^{-x} \geqslant 1 - x$ (tangente en 0). D'où :

$$\mathbb{P}(C_n) \leqslant \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=n}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = \lim_{N \to +\infty} e^{-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)} = 0$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, C_n est négligeable, $\overline{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ aussi et $\mathbb{P}(B) = 1$.

B) Majoration ⋆⋆⋆⋆

Proposition 10.2.4

Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, et $\mathbb{E}(X) < +\infty$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) = o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Démonstration. $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) < +\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n\mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = R_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

C) Séries de variables aléatoires ⋆⋆

Lemme 10.2.5

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X \geqslant a}) = \mathbb{P}(X \geqslant a)$$

Démonstration. Immédiate.

Proposition 10.2.6

Considérons (X_n) une suite de variable aléatoires discrètes, telle que pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. Alors $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n$ est une variable aléatoire discrète et dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n)$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que Z est une variable aléatoire discrète. On note S_n les sommes partielles.

◁ $Z(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

◁ $(Z = k) = (\exists n \in \mathbb{N}^*, S_n = k, \forall j \geqslant n+1, X_j = 0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left((S_n = k) \cap \bigcap_{j=n+1}^{+\infty} (X_j = 0) \right) \in \mathcal{T}$.

De plus, $(Z = +\infty) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (\exists N \geqslant n, X_N \neq 0) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N=n}^{+\infty} (X_n \neq 0) \in \mathcal{T}$.

Montrons maintenant que $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

◁ S'il existe $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_j) = +\infty$. Comme $Z \geqslant X_j$, $\mathbb{E}(Z) = +\infty$.

◁ Supposons désormais que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^1)^{\mathbb{N}}$.

— Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Si $\mathbb{E}(Z) < +\infty$, $\mathbb{E}(S_n) \leqslant \mathbb{E}(Z)$ d'où $\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(X_j) \leqslant \mathbb{E}(Z) < +\infty$ d'où la convergence.

— Si $\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(X_j) < +\infty$, $\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_n \geqslant k)$.

A k fixé, $(S_n \geqslant k)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante d'évènements. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \geqslant k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (S_n \geqslant k) \right) = \mathbb{P}(Z \geqslant k)$$

Or pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(X_j) \geqslant \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(S_n \geqslant k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(Z \geqslant k)$.

Par conservation des inégalités à la limité, $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_j) \geqslant \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(Z \geqslant k)$.

Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, par convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(Z \geqslant k)$,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_j) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant k) = \mathbb{E}(Z)$$

Un cas particulier d'application est le cas où $(X_n) = (\mathbb{1}_{A_n})$ où $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$.

D'après ce qui précède, pour $\omega \in \Omega$, si $Z_\infty(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = |n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

$$\mathbb{E}(Z_\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

III) Inégalités probabilistes

A) Concentration ⋆⋆⋆

Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev sont au programme.

Proposition 10.3.1

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $X \in \mathcal{L}^2$ et $\mathbb{E}(X^2) > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(X > 0) \geqslant \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$$

Démonstration. On écrit comme $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}_+$, $X = X\mathbb{1}_{X>0}$. Par Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X>0}) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X > 0)$$

Proposition 10.3.2

Soit $X \in \mathcal{L}^2$ avec $\mathbb{E}(X^2) > 0$. Soit $\lambda \in [0\,,1]$. Alors :

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda\mathbb{E}(X)) \geqslant \frac{(1-\lambda)^2\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$$

Démonstration. On décompose X ainsi, en posant $m = \mathbb{E}(X)$: $X = X\mathbb{1}_{X\geqslant\lambda m} + \underbrace{X\mathbb{1}_{X<\lambda m}}_{<\lambda m}$.

Alors, $m \leqslant \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X\geqslant\lambda m}) + \lambda m$
Ainsi, $(1-\lambda)m \leqslant \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X\geqslant\lambda m})$. Ainsi :

$$(1-\lambda)^2m^2 \leqslant \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X\geqslant\lambda m})^2 \underset{\text{CS}}{\leqslant} \mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geqslant \lambda m)$$

B) Somme de variables aléatoires ⋆⋆⋆⋆

Théorème 10.3.3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), centrées à valeurs dans $[-1\,,1]$.
Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors :

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|S_n| > a) \leqslant 2\exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$$

Démonstration. Démonstration assez longue, en plusieurs étapes.

1. Montrons que $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1\,,1]\,, e^{-tx} \leqslant \dfrac{1-x}{2}e^{t} + \dfrac{1+x}{2}e^{-t}$.

   On remarque que $\dfrac{1-x}{2}(-t)+\dfrac{1+x}{2}t = xt$. Or $\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{1+x}{2} = 1$. Ainsi par convexité de l'exponentielle,
   $$e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}e^{t} + \frac{1+x}{2}e^{-t}$$

2. Montrons que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{E}(e^{tS_n}) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2}\right)$.

   $$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, e^{tX_i(\omega)} \leqslant \frac{1-X_i(\omega)}{2}e^{t} + \frac{1+X_i(\omega)}{2}e^{-t}$$

   Par croissance et linéarité de l'espérance,
   $$\mathbb{E}(e^{tX_i}) \leqslant \frac{1-\overbrace{\mathbb{E}(X_i)}^{=0}}{2}e^{-t} + \frac{1+\overbrace{\mathbb{E}(X_i)}^{=0}}{2}e^{t} = \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \mathrm{ch}(t)$$

   D'où $\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} e^{tX_j}\right) = \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}(e^{tX_j}) \leqslant \mathrm{ch}(t)^n$ par indépendance.

   Or montrons qu'on a l'inégalité classique $\mathrm{ch}(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

3. Montrons que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

   $$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \text{ et } e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

   Or $(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k \geqslant \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$ d'où $\dfrac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \dfrac{t^{2n}}{2^n n!}$ et en sommant, on obtient l'inégalité souhaitée.

4. Montrons que $\forall a > 0, \mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp\left(\dfrac{-a^2}{2n}\right)$.

   $$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) = \mathbb{P}(S_n \geqslant a) + \mathbb{P}(S_n < -a) = \mathbb{P}(S_n \geqslant a) + \mathbb{P}(-S_n \geqslant a)$$

   Par stricte croissance de exp,
   $$\forall t > 0, \mathbb{P}(S_n \geqslant a) = \mathbb{P}(e^{tS_n} \geqslant e^{ta}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{ta}} \text{ par Markov}$$

   d'où $\mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - ta\right)$. Or $\dfrac{nt^2}{2} - ta$ est minimal en $\dfrac{a}{n}$.

   Ainsi, $\mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \exp\left(\dfrac{-a^2}{2n}\right)$.

   Pour majorer, $\mathbb{P}(S_n \geqslant a)$, on remarque que $-S_n = \sum_{j=1}^{n}(-X_j)$ où les $(-X_j)_j$ vérifient les mêmes hypothèses.

   D'où $\mathbb{P}(-S_n \geqslant a) \leqslant \exp\left(\dfrac{-a^2}{2n}\right)$ et ainsi $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp\left(\dfrac{-a^2}{2n}\right)$.

On peut montrer par exemple, en appliquant ce résultat avec $a = \varepsilon n$,
$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right)$$

Théorème 10.3.4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes i.i.d. centrées avec $|X_n| \leqslant c_n$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors :

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|S_n| > a) \leqslant 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$$

Démonstration. On applique ce qui précède avec $\tilde{X_n} = \frac{X_n}{c_k}$. Laissé en exercice.

C) Théorème de Weierstrass ⋆⋆

Théorème 10.3.5: Weierstrass

L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a\,,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a\,,b]\,,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration. Avec les polynômes de Bernstein

◅ On le montre d'abord pour $f \in \mathcal{C}^0([0\,,1]\,,\mathbb{R})$.
On pose $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k}$.
On remarque qu'en suite, si les (X_i) suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,,1]$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, et alors :

$$B_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) p^k(1-p)^{n-k} = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

d'après la formule de transfert.
Soit $\varepsilon > 0$. f étant continue sur le segment $[0\,,1]$, elle y est uniformément continue d'après le théorème de Heine, donc on dispose de $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0\,,1]^2\,, |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
|B_n(p) - f(p)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p) \right) \right| \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{k \in [\![0\,,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{=1} \varepsilon + \sum_{\substack{k \in [\![0\,,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \delta}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p) \right| \mathbb{P}(S_n = k) \\
&\leqslant \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \sum_{\substack{k \in [\![0\,,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \delta}} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n} \right) \\
&= \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\substack{k \in [\![0\,,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \delta}} \left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n} \right) \right) = \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geqslant \delta \right) \\
&\leqslant \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\delta^2} \\
&= \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \frac{p(1-p)}{n\delta^2}
\end{aligned}$$

Ansi $\sup_{x \in [0\,,1]} |B_n(p) - f(p)| \leqslant \varepsilon + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ (car $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$).

On dispose alors de $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour $n \geqslant N_0$, $\sup_{x \in [0\,,1]} |B_n(p) - f(p)| \leqslant 2\varepsilon$.

◅ Pour montrer le théorème sur $[a\,,b]$, on compose par :

$$t \mapsto (1-t)a + tb \text{ et } x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$$

D) Convergence presque-sûre et loi des grands nombres ⋆⋆

La loi faible des grands nombres est supposée connue et est au programme.
Il en existe une version "forte" qui demande d'introduire un nouveau mode de convergence des probabilités : la convergence "presque sûre".

Définition 10.3.6: Convergence presque-sûre

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X une variable aléatoire discrète si :

$$\mathbb{P}\left(X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X \right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geqslant N} \left(|X_n - X| \leqslant \frac{1}{k} \right) \right) = 1$$

On note dans ce cas $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} X$.

Lemme 10.3.7: Convergence de série et convergence presque sûre

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Si pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon)$ converge, alors $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$.

Démonstration. Dans ce cas, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} (|Y_n| > \varepsilon)\right) = 0$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant N} (|Y_n| \leqslant \varepsilon)\right) = 1$$

Finalement,

$$\mathbb{P}\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant N} \left(|Y_n| \leqslant \frac{1}{k}\right)\right) = 1$$

Théorème 10.3.8: Loi forte des grands nombres, version $\mathcal{L}^4$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathcal{L}^4\right)^{\mathbb{N}}$ indépendantes identiquement distribuées. Alors,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1) = m$$

Démonstration. Quitte à poser $\tilde{X_k} = X_k - m$, on suppose que les $X_k, k \in \mathbb{N}^*$ sont centrées. Posons $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors, par inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y_n|^4 \geqslant \varepsilon^4) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(Y_n^4\right)}{\varepsilon^4}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y_n^4\right) &= \frac{1}{n^4}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4\right) \\
&= \frac{1}{n^4}\mathbb{E}\left(\sum_{1\leqslant i_1,i_2,i_3,i_4\leqslant n} X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\right) \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{1\leqslant i_1,i_2,i_3,i_4\leqslant n} \mathbb{E}\left(X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\right) \\
&= \frac{1}{n^4}\left(n^2\mathbb{E}(X_1^4) + 3n(n-1)\mathbb{E}(X_1^2)^2\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\sum \mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon)$ converge. D'après le Lemme précédent, $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$.

Ce résultat est néanmoins valable si les variables ne sont supposées que $\mathcal{L}^1$! La démonstration pour le cas $\mathcal{L}^2$ reste accessible au niveau prépa.

IV) Série génératrice de $S = \sum_{j=1}^{T} X_j$ ⋆⋆⋆

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire indépendante des (X_n) à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Posons $S : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ \omega & \longmapsto & \sum_{j=1}^{T(\omega)} X_j(\omega) \end{cases}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Lemme 10.4.1: S est une variable aléatoire

S est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Démonstration. D'une part, $S(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(S = n) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (S = n) \cap (T = k) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (T = k) \cap (S_k = n) \in \mathcal{T}$$

par définition de S_k.

Lemme 10.4.2: Loi de S

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = n) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S = n, T = k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_k = n, T = k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k) \text{ par lemme des coalitions} \end{aligned}$$

Proposition 10.4.3: Fonction génératrice de S

$$G_S = G_T \circ G_{X_1}$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0\,,1]$,

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S=n)t^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n \text{ par la loi de } S \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(T=k) \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_k=n)}_{=G_{S_k}(t)=(G_{X_1}(t))^k} t^n \\ &= G_T(G_{X_1}(t)) \end{aligned}$$

D'où le résultat souhaité.

Corollaire 10.4.4: Espérance

Si $T, X \in \mathcal{L}^1$,

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X)$$

Démonstration. Comme $T, X \in \mathcal{L}^1$, G_T et G_X sont dérivables en 1. De plus $G_X(1) = 1$. Donc G_S est dérivable en 1. Ainsi, $S \in \mathcal{L}^1$.
Ainsi $\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = G'_X(1)G'_T(\underbrace{G_X(1)}_{=1})$. D'où $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X)$.

V) Processus stochastiques et temps d'arrêt

A) Le pile ou face ⋆⋆⋆

A.1 Pile-pile ou face-face

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Posons

$$T : \begin{cases} \Omega = \{0,1\} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^*, X_{k-1}(\omega) = 1 \text{ et } X_k(\omega) = 1\} \text{ si non-vide} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Il s'agit du temps d'arrêt associé à la séquence "pile-pile".

Lemme 10.5.1: T est une variable aléatoire

T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Démonstration. On a $T(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. De plus pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(T = k) = (X_k = 1) \cap (X_{k-1} = 1) \cap \bigcap_{j=2}^{k-1} \overline{(X_j = 1, X_{j-1} = 1)} \in \mathcal{T}$$

et $(T = +\infty) = \bigcap_{j=2}^{+\infty} \overline{(X_j = 1, X_{j-1} = 1)} \in \mathcal{T}$.

Proposition 10.5.2: Relation de récurrence sur $\mathbb{P}(T = k)$

Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \mathbb{P}(T = k)$. Alors :

$$\begin{cases} p_1 &= 0 \\ p_2 &= \frac{1}{4} \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{4}p_{k-2} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Démonstration. On conditionne selon X_1.

◁ $p_1 = \mathbb{P}(T = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(T = 2) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1) = \frac{1}{4}$.

◁ Soit $k \geqslant 3$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T = k, X_1 = 1) + \mathbb{P}(T = k, X_1 = 0) = \mathbb{P}(T = k, X_1 = 1, X_2 = 0) + \mathbb{P}(T = k, X_1 = 0)$$

— On montre que $\mathbb{P}(T = k, X_1 = 0) = \frac{1}{2}p_{k-1}$. En voici une explication intuitive : si on a obtenu face au premier lancer ; dans ce cas il reste $(k-1)$ lancers où il

faut obtenir le premier "double pile" au bout du $(k-1)$-ème, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{k-1}. On a donc :

$$\mathbb{P}(T=k, X_1=0) = \mathbb{P}(T=k \mid X_1=0)\mathbb{P}(X_1=0) = p_{k-1} \times \frac{1}{2}$$

Voici néanmoins une rédaction plus formelle : posons $\tilde{X_k} = X_{k+1}$ pour $k \geqslant 1$, et $\tilde{T}$ le temps d'arrêt associé aux $(\tilde{X_k})$. Pour $k \geqslant 1$, $\tilde{X_k}$ et X_1 sont indépendants (car les (X_n) le sont). Ainsi $\tilde{T}$ et X_1 sont indépendants (vue l'expression de $(\tilde{T}=k)$ en fonction des $(\tilde{X_k})$). Donc :

$$\mathbb{P}(T=k, X_1=0) = \mathbb{P}(\tilde{T}=k-1, X_1=0)$$

En effet les évènements $(T=k, X_1=0)$ et $(\tilde{T}=k-1, X_1=0)$ sont égaux : comme $k \geqslant 3$, en supprimant le premier lancer fixé, on attend un tour de moins pour obtenir "pil-pile" en commençant au second lancer.
Par indépendance,

$$\mathbb{P}(T=k, X_1=0) = \mathbb{P}(\tilde{T}=k-1, X_1=0) = \mathbb{P}(\tilde{T}=k-1)\mathbb{P}(X_1=0)$$

Or, T et $\tilde{T}$ suivent la même loi (il suffit d'écrire les évènements, et d'utiliser l'indépendance des (X_n) pour l'obtenir). Donc :

$$\mathbb{P}(T=k, X_1=0) = \mathbb{P}(T=k-1)\mathbb{P}(X_1=0) = \frac{1}{2}p_{k-1}$$

— On montre maintenant que $\mathbb{P}(T=k, X_1=1, X_2=0) = \frac{1}{4}p_{k-2}$. On a obtenu pile au premier lancer. Dans ce cas, on a forcément obtenu face au deuxième (sinon $T=2$), donc avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Puis, il reste $(k-2)$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $(k-2)$-ème. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{k-2}. Donc :

$$\mathbb{P}(T=k, X_1=1, X_2=0) = \mathbb{P}(T=k \mid X_1=1)\mathbb{P}(X_1) = 1 = \left(\frac{1}{2}p_{k-2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}p_{k-2}$$

On propose également une rédaction formelle, en posant comme précédemment $\hat{X_k} = X_{k+2}$ et $\hat{T}$ le temps d'arrêt associé. Les $(\hat{X_k})_{k\geqslant 1}$ sont indépendants de X_1 et X_2. Par indépendance,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=k, X_1=1, X_2=0) &= \mathbb{P}(\hat{T}=k-2, X_1=0, X_2=0)\\ &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(\hat{T}=k-2)\\ &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(T=k-2)\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(T=k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T=k-1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T=k-2)$.

Finalement on a $p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{4}p_{k-2}$.

Corollaire 10.5.3: Le jeu s'arrête presque sûrement

L'évènement $(T < +\infty)$ est presque sûr.

Démonstration. $\mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$. Posons $s = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=2}^{+\infty} p_k$. On somme la relation de récurrence pour $k \geqslant 3$:

$$\sum_{k=3}^{+\infty} p_k = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s \text{ d'où } s - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}s \text{ donc } s = 1$$

Ainsi $\mathbb{P}(T < \infty) = s = 1$.

Corollaire 10.5.4: Espérance

$$\mathbb{E}(T) = 6$$

Démonstration. $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T = k)$ comme $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$.
$\mathbb{E}(T) - 2\frac{1}{4} = \sum_{k=3}^{+\infty} kp_k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}(k+1)p_k + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+2)p_k$.
Ainsi, $\mathbb{E}(T) - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\mathbb{E}(T) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathbb{E}(T) + \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(T) = 6$.

A.2 Pile-face ou face-pile

Avec les mêmes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on pose cette fois :

$$T : \begin{cases} \Omega = \{0,1\} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^*, X_{k-1}(\omega) = 0 \text{ et } X_k(\omega) = 1\} \text{ si non-vide} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Il s'agit du temps d'arrêt associé à la séquence "pile-face".

Lemme 10.5.5: T est une variable aléatoire

T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Démonstration. Laissée en exercice.

Proposition 10.5.6: Relation de récurrence sur $\mathbb{P}(T=k)$

Notons pour $k \in \mathbb{N}^*$, $q_k = \mathbb{P}(T=k)$. Alors :

$$\forall k \geqslant 1, q_k = \frac{k-1}{2^k}$$

Démonstration. $\mathbb{P}(T=1) = 0$ et $\mathbb{P}(T=2) = \frac{1}{4}$ de même.
Soit $k \geqslant 3$. Avec les notations utilisées dans les démonstrations précédentes,

$$\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(T=k, X_1=0) + \mathbb{P}(T=k, X_1=1)$$

On a comme précédemment $\mathbb{P}(T=k, X_1=0) = \mathbb{P}(\tilde{T}=k-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}q_{k-1}$.
De plus, $\mathbb{P}(T=k, X_1=0) = \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_{k-1} = 0, X_k = 1) = \frac{1}{2^k}$ par indépendance.
Ainsi,

$$q_k = \frac{1}{2}q_{k-1} + \frac{1}{2}$$

En posant $v_k = 2^k q_k$, on obtient $v_k = v_{k-1} + 1$ et une rapide étude avec les termes initiaux montre le résultat souhaité.

Corollaire 10.5.7: Espérance

L'évènement $(T < +\infty)$ est presque sûr.
$\mathbb{E}(T) = 4$.

Démonstration. Laissée en exercice, procéder comme au cas précédent.

B) Marches aléatoires en dimension 1 ⋆⋆⋆

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}*}$ des variables aléatoires de Rademacher i.i.d., de paramètre p.
On pose $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Remarque 10.5.8

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \{0,1\}, S_n(\omega) \equiv n[2]$$

Proposition 10.5.9: $\mathbb{P}(S_n=0)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(S_{2n+1}=1) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 1) = 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{2n} = 0) &= \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,2n]\!] \\ |I|=n}} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i\in I}(X_i = 1)\right) \cap \left(\bigcap_{i\notin I}(X_i = -1)\right)\right) \\ &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n\end{aligned}$$

Introduisons pour la suite

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) x^n = (1 - 4p(1-p)x^2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

de rayon de convergence $\geqslant 1$ car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) < +\infty$ Posons également la variable aléatoire

$$T_0 : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^*, X_{k-1}(\omega) = 1 \text{ et } X_k(\omega) = 0\} \text{ si cet ensemble est non-vide} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Et la fonction

$$G : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_0 = n) x^n \end{cases}$$

de rayon de convergence $\geqslant 1$ car $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T_0 < +\infty) \leqslant 1$.

Proposition 10.5.10: Temps du premier retour en 0

$$G(x) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}$$

On en déduit alors que $\mathbb{P}(T_0 = 2n) = \dfrac{(2(2n-1))!}{2^{4n-1}(2n)!(2n-1)!}$.

Démonstration. On établit une équation reliant $F(x)$ et $G(x)$. Pour cela, on va exprimer F en fonction de G, c'est-à-dire qu'on exprime $\mathbb{P}(S_n = 0)$ en fonction de T_0.
Soit $n \geqslant 1$. On a comme précédemment :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_n = 0, T_0 = k)$$

On pose pour $l \geqslant 1$, $\tilde{X}_l = X_{k+l}$. Comme précédemment, les $(\tilde{X}_l)$ sont i.i.d. et suivent la même loi que les $(X_n)_n$.

De plus les $(\tilde{X}_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes de x_1. Par lemme des coalitions les $\tilde{S}_l = \displaystyle\sum_{p=1}^{l} \tilde{X}_p$

sont indépendants de $X_1, \dots, X_k$.
De plus T est indépendante des $(\tilde{S}_l)$ car

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (T = k) = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} (S_j \neq 0)\right) \cap (S_k = 0)$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = 0) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tilde{S_{n-k}} = 0, T_0 = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tilde{S_{n-k}} = 0)\mathbb{P}(T_0 = k) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_{n-k} = 0)\mathbb{P}(T_0 = k) \text{ car même loi} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_{n-k} = 0)\mathbb{P}(T_0 = k) \text{ car } \mathbb{P}(T = 0) = 0
\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in]-1,1[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n$. Ainsi par produit de Cauchy,

$$F(x) = 1 + F(x)G(x)$$

Mais $F(x) = (1 - 4p(1-p)x^2)^{-\frac{1}{2}}$ donc :

$$G(x) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}$$

Enfin, notons les (a_n) tels que $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On a $G(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!} x^n$.
Or pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T_0 = 2k) = a_{2k}$ d'où le résultat.

Corollaire 10.5.11

$$(T_0 < +\infty) \text{ est presque sûr} \iff p = \frac{1}{2}$$

On revient presque sûrement en 0 *si et seulement si* la probabilité est uniforme.

Démonstration. On remarque que $\mathbb{P}(T_0 < +\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_0 = n) = G(1)$. Attention néanmoins, on n'a pas prouvé que G était continue en 1.

On utilise pour cela le lemme radial d'Abel : Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_0 = n) < +\infty$, la série $\sum \mathbb{P}(T_0 = n)x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$. Ainsi G est continue sur $[-1,1]$.
On en déduit que pour tout $x \in [-1,1], G(x) = 1 - \sqrt{4p(1-p)x^2}$.
Ainsi, $\mathbb{P}(T_0 < +\infty) = 1 \iff 1 - 4p(1-p) = 0 \iff p = 1 - p = \frac{1}{2}$.

Exercice 11

Soit T_1 la variable aléatoire du temps du premier retour en 1. Trouver G_{T_1}.

C) $\mathbb{E}(|S_n|)$ pour une marche aléatoire centrée ⋆⋆

Considérons une marche aléatoire centrée ; c'est-à-dire qu'on prend $(X_n)_n$ des variables de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$.

On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ et $S_0 = 0$. On cherche à déterminer $\mathbb{E}(|S_n|)$.

On pourrait calculer $\mathbb{E}(|S_n|)$ avec l'expression de $\mathbb{E}$ et la loi de S_n. Néanmoins ces calculs sont fastidieux.

On suppose connus les résultats :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} \text{ et } \mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$$

Proposition 10.5.12: Relation de récurrence

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}|S_n| + \mathbb{P}(S_n = 0)$$

Démonstration. On écrit que

$$|S_{n+1}| = |S_n + 1|\,\mathbb{1}_{X_{n+1}=1} + |S_n - 1|\,\mathbb{1}_{X_{n+1}=-1}$$

Par linéarité de l'espérance, et par indépendance de S_n et X_{n+1},

$$\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}(|S_n + 1|)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{E}|S_n - 1|\mathbb{P}(X_{n+1} = -1) = \mathbb{E}\left(\frac{|S_n + 1| + |S_n - 1|}{2}\right)$$

Mais on remarque que pour $x \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{|x + 1| + |x - 1|}{2} = |x| + \mathbb{1}_{x=0}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}(|S_n| + \mathbb{1}_{S_n=0}) = \mathbb{E}(|S_n|) + \mathbb{P}(S_n = 0)$$

Corollaire 10.5.13: Expression

$$\mathbb{E}(|S_n|) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}$$

Démonstration. On procède par téléscopage.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|S_n|) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(|S_{k+1}|) - \mathbb{E}(|S_k|) + \overbrace{\mathbb{E}(|S_0|)}^{=0} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}}\end{aligned}$$

Proposition 10.5.14: Equivalent en $n \to +\infty$

$$\mathbb{E}(|S_n|) \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

Démonstration. $\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}} \sim \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \sqrt{4\pi k} \left(\frac{e}{k}\right)^{2k} \frac{1}{2\pi k 2^{2k}}$ par Stirling.

Ainsi $\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \geqslant 0$ terme général d'une série divergente. Par théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\mathbb{E}(|S_n|) \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

D) Chaînes de Markov ⋆⋆

D.1 Matrices stochastiques

Définition 10.5.15: Matrice stochastique

$P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est stochastique si ses coefficients sont positifs et que $\forall j \in [\![1\,,N]\!], \sum_{i=1}^{N} p_{i,j} = 1$.

Lemme 10.5.16: Réduction des matrices stochastiques

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stochastique. Alors :

- $1 \in \mathrm{Sp}(P)$;

◅ $\mathrm{Sp}(P) \subseteq \overline{B}(0,1)$.

Démonstration. D'une part $P^\top \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(P^\top) = \mathrm{Sp}(P)$.
D'autre part, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(P)$. Soit X un vecteur propre associé à λ.
Soit $i_0 \in [\![1\,,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i\in[\![1\,,n]\!]} |x_i|$. Or $PX = \lambda X$ donc :

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!]\,, \lambda x_k = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} x_k$$

Ainsi par inégalité triangulaire, pour $i \in [\![1\,,n]\!]$,

$$|\lambda|\,|x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |p_{i,k}|\,|x_{i_0}|$$

Par définition de i_0,

$$\lambda \leqslant \sum_{k=1}^{n} |p_{i,k}| = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} = 1$$

D.2 Application probabiliste

Définition 10.5.17: Chaîne de Markov

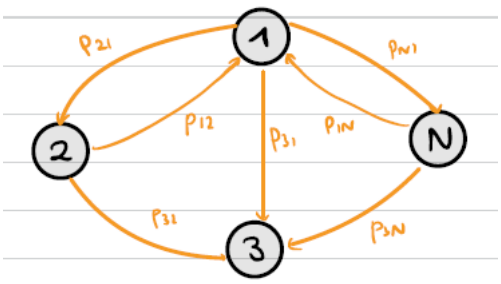
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![1\,,N]\!]$.
On dit qu'il s'agit d'une chaîne de Markov si pour tous $(i_1,\ldots,i_n) \in [\![1\,,N]\!]^n$,

$$\mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$$

On dit qu'il s'agit d'une chaîne de Markov homogène si :

$$\forall n \geqslant 1, \forall (i,j) \in [\![1\,,N]\!]^2\,, \mathbb{P}(X_n = i \mid X_{n-1} = j) = \mathbb{P}(X_1 = i | X_0 = j) = p_{i,j}$$

Dans la suite, on se donne $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une chaîne de Markov homogène. On peut la représenter ainsi (prendre garde au sens des flèches) :



Théorème 10.5.18: Matrice associée à une chaîne de Markov homogène

On définit la matrice associée à la chaîne de Markov homogène $(X_k)_k$ par :

$$P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N} = (\mathbb{P}(X_1 = i \mid X_0 = j))_{1\leqslant i,j\leqslant N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Cette matrice vérifie les propriétés suivantes :

- ◁ P est stochastique.
- ◁ Si $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$, alors $Y_n = P^n Y_0$. Ainsi la loi de X_n est connue.

Démonstration. ◁ Soit $j \in [\![1\,,N]\!]$. Alors

$$\sum_{i=1}^{N} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_1 = i \mid X_0 = j) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\bigsqcup_{i=1}^{N}(X_1 = i)}_{=\Omega} \mid X_0 = j\right) = 1$$

◁ On a par formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{j=1}^{N} p_{i,j}\mathbb{P}(X_{n-1} = j)$$

Cela amène immédiatement par produit matriciel $Y_n = PY_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

On peut donc utiliser la partie sur les matrices stochastiques pour réduire P. Néanmoins, dans une majorité d'exercices, un cas plus précis se pose :

Proposition 10.5.19: Cas particulier

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}*}$ une chaîne de Markov homogène de matrice associée P. On suppose que :

- ◁ P est diagonalisable.
- ◁ $E_1(P) = \text{Vect}(X_1)$.

Alors, $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{N}[X_1]_j} X_1 \in E_1(P)$.

Démonstration. On peut écrire $P = Q \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & \lambda_N \end{pmatrix}}_{=D} Q^{-1}$. Ainsi pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P^k = Q \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ (0) & & \lambda_N^k \end{pmatrix} Q^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \Pi$$

où Π est la matrice de projection sur $E_1(P) = \mathrm{Vect}(X_1)$ parallèlement à $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(P)\setminus\{0\}} E_\lambda(P)$.

Ainsi, $Y_k = P^k Y_0 \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Pi Y_0 \in E_1(P)$ par continuité de $M \mapsto MX$ (linéaire en dimension finie).

On sait donc que $Y_\infty = \lim_{k\to+\infty} Y_k = \Pi Y_0$ est de la forme $Y_\infty = \alpha X_1$. Trouvons ce α.

Posons $L = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$, $LY_k = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(Y_k = j) = 1$ donc par continuité de $Z \mapsto LZ$, $LY_\infty = 1$.

On en déduit donc que $\alpha L Y_0 = 1$ soit $\alpha \sum_{j=1}^{N} [X_1]_j = 1$.

Or, $\alpha \sum_{j=1}^{N} [X_1]_j \neq 0$ (sinon on ne peut avoir l'égalité précédente), donc $\alpha = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{N} [X_1]_j}$.

Chapitre 11

Espaces euclidiens

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien, c'est-à-dire :

- un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
- muni d'un produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$;
- de dimension finie.

On notera $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par :

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

I) Isométries et matrices orthogonales

A) Théorème de Riesz ⋆⋆⋆⋆

Lemme 11.1.1: Caractérisation d'un produit scalaire comme injectivité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et φ une forme bilinéaire symétrique positive sur E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- φ est un produit scalaire ;
- $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & \varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(a,x) \end{array} \right. \end{array} \right.$ est injective.

Démonstration.

1. $\Rightarrow$: Soit $a \in \operatorname{Ker}\theta$. Alors $\varphi_a = 0_{E^*}$ (on rappelle que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$). En particulier, $\|a\|^2 = \langle a \mid a \rangle = \varphi_a(a) = 0$ d'où $a = 0_E$.
2. $\Leftarrow$: Soit $a \in E \setminus \{0\}$. $a \notin \operatorname{Ker}\theta$ car θ est injective. On dispose donc de $b \in E$, $\varphi(a,b) = \varphi_a(b) \neq 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|ta + b\|^2 \geqslant 0$ soit $t^2 \|a\|^2 + 2t \underbrace{\varphi(a,b)}_{\neq 0} + \|b\|^2 \geqslant 0$.

   Nécessairement $\|a\|^2 \neq 0$ sinon on a une application affine de degré 1 qui prend donc des valeurs négatives. Ainsi $a \neq 0$.

Ce lemme amène directement le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien :

Théorème 11.1.2: Théorème de représentation de Riesz

Soit $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace euclidien. Alors, pour tout $\psi \in E^*$, il existe un unique $a \in E$,

$$\psi = \varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle a \mid x \rangle \end{array} \right.$$

Toute forme linéaire sur un espace euclidien est donc de la forme $\langle a \mid \cdot \rangle$.

B) Adjoint ⋆⋆⋆

Lemme 11.1.3: Noyau et image de l'adjoint

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- $\operatorname{Ker}(u^*) = (\operatorname{Im} u)^\perp$;
- $\operatorname{Im}(u^*) = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(u^*) &\iff u^* = 0_{E^*} \\ &\iff \forall y \in E, \langle u^*(x) \mid y \rangle = 0 \\ &\iff \forall y \in E, \langle x \mid u(y) \rangle = 0 \\ &\iff \forall z \in \operatorname{Im} u, \langle x \mid z \rangle = 0 \\ &\iff x \in (\operatorname{Im} u)^\perp \end{aligned}$$

De plus $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}((u^*)^*) = \operatorname{Im}(u^*)^\perp$ donc $\operatorname{Ker} u = \left(\operatorname{Im}(u^*)^\perp\right)^* = \operatorname{Im} u^*$.

Lemme 11.1.4: Rang de $u^* \circ u$

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{rg}(u^* \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Démonstration. Assez importante.

- D'une part $\operatorname{Ker} u \subseteq \operatorname{Ker}(u^* \circ u)$.
- D'autre part, si $x \in \operatorname{Ker}(u^* \circ u)$, $u^* \circ u(x) = 0$ donc

$$\langle u^* \circ u(x) \mid x \rangle = 0 \text{ soit } \|u(x)\|^2 = \langle u(x) \mid u(x) \rangle = 0$$

On en déduit que $u(x) = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker} u$.

Ainsi, $\operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker} u$ et par formule du rang, $\operatorname{rg}(u^* \circ u) = \operatorname{rg} u$.

C) Caractérisation des projecteurs orthogonaux ⋆⋆⋆

Proposition 11.1.5

Soit p un projecteur de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- p est un projecteur orthogonal ;
- $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ (id *est* $\|\!|p|\!\| \leqslant 1$).

Cet exercice est important notamment pour la méthode développée pour le sens réciproque, méthode par ailleurs similaire à celle du Lemme **??**

Démonstration.

$\Rightarrow$: Il s'agit du théorème de Pythagore. En effet $E = \operatorname{Im} p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} p$. Donc pour $x \in E$, $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \operatorname{Ker} p$ et $x_2 \in \operatorname{Im} p$.
On a alors par Pythagore : $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geqslant \|x_1\|^2 = \|p(x)\|^2$. Par définition de la norme triple (surbordonnée à $\|\cdot\|$), on a

$$\|\!|p|\!\| \leqslant 1$$

$\Leftarrow$: On suppose $\|\!|p|\!\| \leqslant 1$. Montrons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont orthogonaux.
Soit $(x, y) \in \operatorname{Im}(p) \times \operatorname{Ker}(p)$. Soit pour $t \in \mathbb{R}$, $z_t = tx + y$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t^2 \|x\|^2 = \|p(z_t)\|^2 \leqslant \|z_t\|^2 = t^2 \|x\|^2 + 2t\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$$

Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leqslant 2t\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$$

Ce n'est possible que si $2\langle x \mid y\rangle = 0$ car sinon on est en présence d'une fonction affine de signe constant sur $\mathbb{R}$ (impossible).
On en déduit que $\langle x \mid y\rangle = 0$, d'où l'orthogonalité souhaitée.

D) Rappel - Réduction des isométries ⋆⋆⋆⋆

On notera les matrices de rotations ainsi :

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{=R_\theta}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Théorème 11.1.6: Réduction des isométries

Soit $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe e une base orthonormée de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} p \in \mathbb{N} \\ q \in \mathbb{N} \\ r \in \mathbb{N} \\ (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r \\ p + q + 2r = n \end{cases}$$

Ainsi, à un changement de base orthonormé près, appliquer une isométrie à un vecteur, revient à appliquer une rotation (d'angle différent) sur chacune de ses coordonnées deux-à-deux.

E) Inégalité d'Hadamard ⋆⋆⋆⋆

Proposition 11.1.7: Inégalité d'Hadamard

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Soit e une base quelconque de E. Posons $A = \mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)$. Alors :

$$|\det A| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

avec égalité *si et seulement si* $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

Démonstration. ◅ Si $(x_1, \dots, x_n)$ liée, c'est évident car $\det A = 0$.

◅ Sinon, $(x_1, \dots, x_n)$ est une base.
Soit $W = (u_1, \dots, u_n)$ obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt.

$$|\det A| = |\det_e(x_1, \dots, x_n)| = \underbrace{|\det_e(u_1, \dots, u_n)|}_{=1} \cdot |\det_W(x_1, \dots x_n)|$$

Or $\mathrm{Mat}_W(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ car $x_i \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots u_i)$.
D'où $|\det_W(x_1, \dots, x_n)| = \prod_{j=1}^{n} |t_{jj}| = \prod_{j=1}^{n} |\langle x_j \mid u_j \rangle| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|$.

◅ On a égalité *si et seulement si* pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\|x_j\|^2 = \langle x_j \mid u_j \rangle^2$ *si et seulement si*

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j \in \mathrm{Vect}(u_j)$$

On a donc égalité *si et seulement si* $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

F) Système de générateurs de $\mathcal{O}(E)$ ⋆

Définition 11.1.8: Réflexion

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Lemme 11.1.9: Une réflexion est indirecte

Soit r une réflexion. Alors $r \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{S}(E)$ et $\det r = -1$.

Démonstration. Dans une base orthonormée bien choisie e, obtenue par réduction des isométries

$$\mathrm{Mat}_e(r) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & -1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant est le produit des coefficients diagonaux, qui vaut -1.

Théorème 11.1.10: Système de générateurs des orthogonaux

Les réflexions engendrent $\mathcal{O}(E)$.

Démonstration. On propose ici deux démonstrations.

◅ Matrices et réduction. On sait réduire les isométries sous la forme de matrices par blocs (composées de rotations et de multiples de l'identité) donc on travaille "par blocs".

— En dimension 2, toute rotation est composée de deux réflexions.
En effet, soit $\theta \in \mathbb{R}$; notons r_θ la rotation associée. Soit $x \in E$, et $D = \mathrm{Vect}(x)$. Alors, si on note ω le vecteur de E tel que l'angle entre x et ω soit $\dfrac{\theta}{2}$, on a :

$$s_D \circ s_{\mathrm{Vect}(\omega)} = r_\theta$$

où s_D est la symétrie par rapport à D.

— Ensuite, on traite le cas général. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$A = P^\top \begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} P$$

Par ce qui précède, pour $i \in [\![1, r]\!]$, $R_{\theta_i} = S_{i,1}S_{i,2}$ où $S_{i,1}, S_{i,2} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, *id est* $\begin{cases} S_{i,1}^2 = S_{i,2}^2 = I_2 \\ \dim \mathrm{Ker}(S_{i,1} + I_2) = \dim \mathrm{Ker}(S_{i,2} + I_2) = 1 \end{cases}$.

Posons pour $j \in \{1,2\}$, $\tilde{S_{i,j}} = P^\top \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & \\ & & & S_{i,j} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} P$, où le $S_{i,j}$ est à la même position que R_{θ_i} dans A.
C'est une matrice de réflexion car : $\tilde{S_{i,j}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \tilde{S_{i,j}}^2 = I_n$ et $\dim \operatorname{Ker}(\tilde{S_{i,j}} + I_n) = 1$.

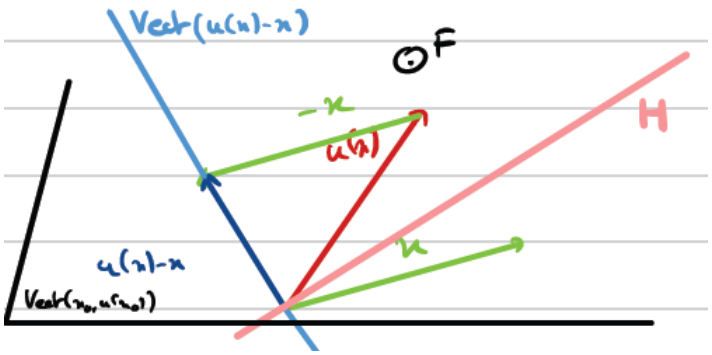
De plus, pour $k \in [\![p+1\,, p+q]\!]$, $T_k = P^\top \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \underbrace{-1}_{\text{col. } k} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} P$ est une réflexion.
Alors :

$$A = \prod_{k=p+1}^{p+q} T_k \prod_{i=1}^{r} \tilde{S_{i,1}}\tilde{S_{i,2}} \text{ produit de réflexions}$$

◁ Récurrence descendente dans $\dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$.
Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Notons $n = \dim E$. Notons pour $k \in [\![0\,, n]\!]$,

$$\mathcal{H}_k : \text{"si } \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) = k \text{ alors } u \text{ est produit de réflexions."}$$

— $\mathcal{H}_n$ est évidente car $u = \mathrm{id}_E$.
— Si $k \in [\![0\,, n-1]\!]$ tel que pour tout $j \geqslant k+1$, $\mathcal{H}_j$ soit vérifiée.
Construisons une réflexion s telle que $\dim \operatorname{Ker}(s \circ u - \mathrm{id}) \geqslant k+1$. Pour cela, si $x \in E \backslash F$ avec $\|x\| = 1$ et $\|u(x)\| = 1$, il faut que $s \circ u(x) = x$. De plus, $u(x) \in F^\perp$ (en effet F est stable par u et son adjoint donc $F^\perp$ aussi).
Prenons donc $H = \operatorname{Vect}(u(x) - x)^\perp$ qui contient F.



En effet dans ce cas $u(x) - x = s(u(x) - x) = s(x) - s \circ u(x)$. Comme

$$\langle x + u(x) \mid x - u(x) \rangle = 0$$

$x + u(x) = s(x + u(x)) = s(x) + s \circ u(x)$ donc $s \circ u(x) = x$.

De plus pour tout $y \in F$, $u(y) = y \in F$ donc $s \circ u(y) = y$ et $\mathrm{Vect}(x) \overset{\perp}{\oplus} F \subseteq \mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{id})$.

— On applique alors $\mathcal{H}_j$ avec $j = \dim \mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{id}) \geqslant k + 1$, et on conclut aisément.

II) Endomorphismes et matrices symétriques

A) Factorisation et réduction simultanée ⋆⋆⋆⋆

Théorème 11.2.1: Racine carrée

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $B^2 = B^\top B = A$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

◅ Existence : D'après le théorème spectral, on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que :

$$A = P^\top D P = P^\top \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P = P^\top \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda}_n \end{pmatrix}^2 P$$

car les $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont positifs. Ainsi $A = P^\top \Delta^2 P = (P^\top \Delta P)^2$.
Ainsi $B = P^\top \Delta P \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et $B^2 = B^\top B = A$.

◅ Unicité : Soit a l'endomorphisme canoniquement associé à a et b tel que $a = b^2$. a et b commutent et par le théorème spectral,

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(a)}} E_\lambda(a) \quad (\star)$$

Chaque $E_\lambda(a)$ est stable par b. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Soit $\tilde{b}$ l'endomorphisme induit par b sur $F = E_\lambda(a)$.
Comme b est diagonalisable, $\tilde{b}$ est diagonalisable. Or $b^2 = a$ donc $(\tilde{b})^2 = a_{|F} = \lambda \mathrm{id}_F$.
Ainsi pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(b)$, $\mu^2 = \lambda$.
Or $b \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$ d'où $\mu = \sqrt{\lambda}$. Comme $\tilde{b}$ est diagonalisable, $\tilde{b} = \sqrt{\lambda}\mathrm{id}_F$. Ainsi b est déterminé uniquement sur chaque $E_\lambda(a)$ donc sur E entier d'après $(\star)$.

Enfin, voici un complément **essentiel** :

Théorème 11.2.2: Réduction simultanée entre une matrice symétrique et une matrice définie positive

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et D une matrice diagonale telles que :

$$A = P^\top P \text{ et } B = P^\top D P$$

On remarquera qu'on a seulement $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et non $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ comme dans le théorème spectral.

Démonstration. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc elle admet une racine carrée d'après le théorème précédent : $A = Q^\top Q$ où $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Soit $B_0 = (Q^{-1})^\top B Q^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On lui applique le théorème spectral : on dispose alors de $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $B_0 = R^\top D R$, avec D diagonale.
Ainsi $B = (RQ)^\top D RQ = P^\top D P$ avec $P = RQ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
De plus $P^\top P = (RQ)^\top RQ = Q^\top \underbrace{R^\top R}_{=I_n} Q = Q^\top Q = A$.

B) Décomposition polaire ⋆⋆⋆

Théorème 11.2.3: Décomposition PS

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple $(P, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = PS$.

Démonstration. ◁ Unicité : Si $A = PS$ avec la décomposition voulue, alors $A^\top A = S^\top P^\top P S = S^2$. Or $A^\top A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, elle admet donc une unique racine carrée S. Ainsi, S est déterminée de façon unique et $P = AS^{-1}$ également.

◁ Existence : On considère S la racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de $A^\top A$, puis $P = AS^{-1}$. On a bien $A = PS$ et
$P^\top P = (S^{-1})^\top A^\top A S^{-1} = S^{-1} \underbrace{A^\top A}_{=S^2} S^{-1} = I_n$ d'où $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Cette décomposition polaire $A = PS$ peut être rapprochée de l'écriture complexe $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$.
En effet $\rho^2 = z\overline{z}$ tout comme $S^2 = A^\top A$.

Proposition 11.2.4: Homémorphisme associé

Posons

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (P, S) & \longmapsto & PS \end{array} \right.$$

Alors θ est un homéomorphisme, c'est-à-dire une bijection continue d'inverse continu.

Démonstration. ◁ Bijectivité : c'est le théorème de décomposition polaire.

◅ Continuité de θ : $(A,B) \mapsto AB$ est continue (bilinéarité en dimension finie).

◅ Continuité de θ^{-1} : On sait d'après la Proposition 6.6.7, que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact. On montre la continuité de θ^{-1} par critère séquentiel.
Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note :

$$(P_k, S_k) = \theta^{-1}(A_k) \text{ et } (P,S) = \theta^{-1}(A)$$

Montrons que $P_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} P$ et $S_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} S$.
La suite (P_k) est à valeurs dans un compact donc elle admet au moins une valeur d'adhérence. On montre que P est la seule.
Soit $Q = \lim\limits_{k\to+\infty} P_{\varphi(k)} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une valeur d'adhérencde de (P_k).
Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = P_k S_k$, $S_{\varphi(k)} = P_{\varphi(k)}^\top A_{\varphi(k)}$. Or $A_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$ et par continuité de la transposée, $P_{\varphi(k)}^\top \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q^\top$. Donc, par continuité du produit matriciel,

$$S_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q^\top A = T$$

et $A = QT$ où $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Or $T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ car $S_{\varphi(k)} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ fermé (voir III.A). Comme $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $A = QT$ est une décomposition polaire.
Par unicité de la décomposition polaire, $Q = P$. Ainsi $P_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} P$. Comme ci-dessus, $P_k^\top A_k = S_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} P^\top A$.
Donc θ^{-1} est continue.

C) Théorème de Courant-Fischer ⋆⋆⋆

Dans cette sous-partie, on considère $u \in \mathcal{S}(E)$, et on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ son spectre ordonné, où $n = \dim E$.
On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u (par théorème spectral).

Proposition 11.2.5: Réexpression de λ_1 et λ_n

$$\lambda_1 = \min_{x\in\mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x\rangle \text{ et } \lambda_n = \max_{x\in\mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x\rangle$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors, notons $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i$. On a :

$$\langle u(x) \mid x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Alors il vient les inégalités :

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x) \mid x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{S}(0,1)$, $\lambda_1 \leqslant \langle u(x) \mid x\rangle \leqslant \lambda_n$, avec égalité pour $x = e_1$ puis $x = e_n$.

Cette propriété est un cas particulier du théorème de Courant-Fischer, aussi appelé théorème "min-max" :

Théorème 11.2.6: Courant-Fischer

Notons, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{V}_j$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension j. Alors :

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{V}_k} \max_{x \in F \cap \mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x \rangle$$

$$\lambda_k = \max_{G \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min_{x \in G \cap \mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x \rangle$$

Le minimum est atteint pour $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \in \mathcal{V}_k$ et le maximum pour $G_k = \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n) \in \mathcal{V}_{n-k+1}$.

Démonstration. ◁ Comment le retrouver ?

— Pour $x \in F_k \cap \mathbb{S}(0,1)$, $x = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j$ donc

$$\langle u(x) \mid x \rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j^2 \leqslant \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k$$

atteint pour $x = e_k \in F_k$.
On a donc montré que : $\lambda_k = \max_{x \in F_k \cap \mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x \rangle$.
On montre alors que $\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{V}_k} \max_{x \in F \cap \mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x \rangle$.

— Pour $x \in G_k \cap \mathbb{S}(0,1)$, $x = \sum_{j=k}^{n} x_j e_j$ donc

$$\langle u(x) \mid x \rangle = \sum_{j=k}^{n} \lambda_j x_j^2 \geqslant \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k$$

atteint pour $x = e_k \in G_k$.
On a donc montré que : $\lambda_k = \min_{x \in G_k \cap \mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x \rangle$.
On montre alors que $\lambda_k = \max_{G \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min_{x \in G \cap \mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x \rangle$

◁ Démonstration du théorème :

— Soit F un sous-espace vectoriel de dimension k. On montre que

$$\max_{x \in F \cap \mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x \rangle \geqslant \lambda_k$$

Comme $\dim F = k$ et $\dim G_k = n - k + 1$, $F \cap G_k \neq \{0\}$.
Soit donc $x_1 \in F \cap G_k \setminus \{0\}$. Quitte à le normaliser, $\|x_1\| = 1$.
Comme $x_1 \in G_k$, comme vu ci-dessus, $\langle u(x_1) \mid x_1 \rangle \geqslant \lambda_k$.
Donc $\max_{x \in F \cap \mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x \rangle \geqslant \lambda_k$. Cela conclut la première inégalité.

— Soit G un sous-espace vectoriel de dimension $n - k + 1$. On montre que

$$\min_{x \in G \cap \mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x \rangle \leqslant \lambda_k$$

Comme $\dim G = n - k + 1$ et $\dim F_k = k$, $G \cap F_k \neq \{0\}$.
Soit donc $x_2 \in G \cap F_k \setminus \{0\}$. Quitte à le normaliser, $\|x_2\| = 1$.

Comme $x_2 \in F_k$, comme vu ci-dessus, $\langle u(x_2) \mid x_2\rangle \leqslant \lambda_k$.
Donc $\min_{x\in G\cap\mathbb{S}(0,1)} \langle u(x) \mid x\rangle \leqslant \lambda_k$. Cela conclut la seconde inégalité.

D) Encadrement du déterminant

Lemme 11.2.7: Positivité des coefficients diagonaux d'une matrice symétrique positive

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, $a_{ii} \geqslant 0$.

Démonstration. Pour $i \in [\![1\,,n]\!]\,, a_{ii} = E_i^\top A E_i \geqslant 0$ car $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Lemme 11.2.8: Majoration du déterminant

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors $0 \leqslant \det A \leqslant \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$ avec égalité *si et seulement si* A est diagonale.

Démonstration. La positivité du déterminant est évidente car $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}_+$.
On écrit ensuite $A = B^\top B$ avec $B = (C_1|\dots|C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors d'après l'inégalité de Hadamard,

$$\det A = (\det B)^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|^2$$

Or $\|C_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}^2 = a_{jj}$. D'après le cas d'égalité de Hadamard, $\det A = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$ *si et seulement si* $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthogonale *si et seulement si* A diagonale.

E) Norme d'algèbre triple

On rappelle que la norme $\|\cdot\|$ est celle associée au produit scalaire euclidien. Ce qui suit n'est donc en général pas valable pour une norme quelconque.

Lemme 11.2.9: La norme triple donne le rayon spectral

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors $|||u||| = \rho(u) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$.

Démonstration. Comme précédemment, on note $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ le spectre ordonné de u.
On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u (par

théorème spectral). Alors :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \rho(u)^2 x_i^2 = \rho(u)^2$$

Il y a égalité pour $x = e_1$ ou e_n selon que $\rho(u) = |\lambda_1|$ ou $|\lambda_n|$.

Corollaire 11.2.10

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$.

Démonstration. On a $u^* \circ u \in \mathcal{S}^+(E)$ donc son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $x \in \mathbb{S}(0,1)$,

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x) \mid u(x) \rangle = \langle u^* \circ u(x) \mid x \rangle$$

Ainsi

$$|||u|||^2 = \max_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \|u(x)\|^2 = \max_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \langle u^* \circ u(x) \mid x \rangle = \rho(u^* \circ u) \geqslant 0$$

Lemme 11.2.11: Deux remarques utiles

Pour $x \in E$, $\|x\| = \max_{y \in \mathbb{S}(0,1)} \langle x \mid y \rangle$.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = \max_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \|u(x)\| = \max_{(x,y) \in \mathbb{S}(0,1)^2} \langle u(x) \mid y \rangle$.

Démonstration. Si $x = 0$, c'est évident. Sinon par Cauchy-Schwarz, $\langle x \mid y \rangle \leqslant \|x\| \, \|y\| = \|x\|$ avec égalité pour $y = \dfrac{x}{\|x\|}$.
La deuxième égalité est un corollaire évident.

Lemme 11.2.12: Norme triple de l'adjoint

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u^*||| = |||u|||$.

Démonstration. On propose ici deux démonstrations.

- $|||u^*||| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$. Comme $\chi_{u^* \circ u} = \chi_{u \circ u^*}$ (à redémontrer), $\rho(u^* \circ u) = \rho(u \circ u^*)$ d'où l'égalité des normes triples.
- $|||u||| = \max_{(x,y) \in \mathbb{S}(0,1)^2} \langle u(x) \mid y \rangle = \max_{(x,y) \in \mathbb{S}(0,1)^2} \langle x \mid u^*(y) \rangle = |||u^*|||$.

III) Topologie sur un espace euclidien

A) Structure de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Théorème 11.3.1: Structure de cône fermé

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un cône fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire que :

- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- Pour tous $(A,B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$, $A+B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$;
- Pour tout $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

A fortiori, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.

Démonstration. $\lhd$ On sait déjà que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant que sous-espace vectoriel en dimension finie. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, considérons :

$$\theta_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \langle AX \mid X \rangle \end{array} \right.$$

qui est continue car linéaire en dimension finie.
Alors, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \theta_X^{-1}(\mathbb{R}_+)$ fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\lhd$ D'une part, pour $(A,B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on a $A+B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car c'est un espace vectoriel.
De plus, pour $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle AX+BX \mid X \rangle = \langle AX \mid X \rangle + \langle BX \mid X \rangle \geqslant 0 \text{ et } \langle \lambda AX \mid X \rangle = \lambda \langle AX \mid X \rangle \geqslant 0$$

Proposition 11.3.2: Superstabilité

Pour tout $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B^\top AB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. $(B^\top AB)^\top = B^\top AB$ donc $B^\top AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus pour $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle B^\top ABX \mid X \rangle = \langle ABX \mid BX \rangle \geqslant 0$$

B) Structure de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Théorème 11.3.3: Caractère ouvert de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas un ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais un ouvert dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. D'une part, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas un ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui est un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit maintenant $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe une boule centrée en A qui est incluse dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Considérons pour cela $\alpha = \inf_{X \in \mathbb{S}(0,1)} \langle AX \mid X \rangle$ qui existe car $X \mapsto \langle AX \mid X \rangle$ est continue sur $\mathbb{S}(0,1)$ compacte.
Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, telle que $|||A - B||| < \alpha$. On montre que $v \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Pour tout $X \in \mathbb{S}(0,1)$, $\langle BX \mid X \rangle = \underbrace{\langle AX \mid X \rangle}_{\geqslant \alpha} + \langle (A-B)X \mid X \rangle$. Donc par inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle (A-B)X \mid X \rangle| \leqslant \|(A-B)X\| \, \|X\| \leqslant |||A - B||| \leqslant \alpha$.
Ainsi, $\langle BX \mid X \rangle > 0$ et donc $B_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A, \alpha) \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est donc ouvert dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 11.3.4: Densité de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Considérons $A_k = A + \dfrac{1}{k} I_n \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$.
Ainsi

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle A_k X \mid X \rangle = \underbrace{\langle AX \mid X \rangle}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{1}{k} \|X\|^2}_{>0} > 0$$

D'où $(A_k) \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})\mathbb{N}$.

C) Projection sur un convexe fermé ⋆⋆⋆

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, tel que $(E, \|\cdot\|)$ soit complet.

Théorème 11.3.5: Existence et unicité du projeté

Soit $K \subseteq E$ un convexe fermé non-vide. Pour $x \in E$, $d(x, E)$ est atteinte en un unique point appelé projection de x sur K et notée $p_K(x)$.

Démonstration. ◁ Existence : Par caractérisation de la borne inférieure, on dispose de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\|x - y_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(x, K)$.

— Si E est euclidien : Comme la suite $(\|x - y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans un espace de dimension finie. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose d'une extractrice φ telle que

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} z \in E$$

Comme K est fermé, $z \in K$ et $d(x, K) = \|z - x\|$. Ainsi, la distance est atteinte.

— Si E est de dimension infinie : on sait que $(E, \|\cdot\|)$ est complet ; on montre donc que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY. Pour cela, on emploie l'identité du parallélogramme.

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, $\dfrac{y_p + y_q}{2} \in K$ par convexité. Donc :

$$2\left(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2\right) = \|y_p - y_q\|^2 + \|2x - (y_p + y_q)\|^2$$

d'où

$$\|y_p - y_q\|^2 = 2\left(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2\right) - 4\underbrace{\left\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\right\|^2}_{\geqslant d(x,K)}$$

$$\leqslant 2\left(\underbrace{\|x - y_p\|^2}_{\to d(x,K)} + \underbrace{\|x - y_q\|^2}_{\to d(x,K)} - 2d(x,K)^2\right) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$$

Ce qui prouve que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de CAUCHY et donc converge par complétude de $(E, \|\cdot\|)$. La limite $z \in K$ vérifie comme précédemment $\|z - x\| = d(x, K)$.

◁ Unicité : Supposons que $d(x, K) = \|y_1 - x\| = \|y_2 - x\|$, avec $y_1 \neq y_2$. Alors par l'identité du parallélogramme,

$$4\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 = 2\left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\right)$$

$$\text{donc } \left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\right) - \frac{\|y_1 - y_2\|^2}{4}$$

$$< d^2$$

Ce qui est absurde car $\dfrac{y_1 + y_2}{2} \in K$. Donc $y_1 = y_2$ et on a unicité du projeté.

Proposition 11.3.6: Caractérisation par angle obtus

Pour tout $y \in E$, $y = p_K(x)$ *si et seulement si* pour tout $z \in K$ l'angle formé par les points (x, y, z) est obtus.
Ceci se réécrit :

$$y = p_K(x) \iff \forall z \in K, \langle x - y \mid z - y\rangle \leqslant 0$$

Démonstration. ◁ $\Rightarrow$: On suppose que $y = p_K(x)$. Soit $z \in K$. Alors par convexité pour $t \in [0\,,1]$, $(1 - t)y + tz \in K$. Donc :

$$\left\|\underbrace{(1 - t)y + tz - x}_{=(y-x)+t(z-y)}\right\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$$

En développant par bilinéarité du produit scalaire,

$$\forall t \in [0\,,1]\,, 2t\langle y - x \mid z - y\rangle + t^2\|z - y\|^2 \geqslant 0$$

Ainsi pour $t \to 0^+$, $\langle y - x \mid z - y\rangle \geqslant 0$ et $\langle x - y \mid z - y\rangle \leqslant 0$.

◁ $\Leftarrow$: On suppose que pour tout $z \in K$, $\langle x-y \mid z-y\rangle \leqslant 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\|z-x\|^2 &= \|(z-y)+(y-x)\|^2 \\ &= \underbrace{\|z-y\|^2}_{\geqslant 0} + 2\underbrace{\langle z-y \mid y-x\rangle}_{\geqslant 0} + \|y-x\|^2 \\ &\geqslant \|y-x\|^2\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $z \in K$, cela prouve que $y = p_K(x)$.

D) Connexités par arcs

Théorème 11.3.7: $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème de réduction des isométries, on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$A = P^\top \begin{pmatrix} I_p & & & (0) \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_{\theta_q} \end{pmatrix} P$$

On pose

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & P \begin{pmatrix} I_p & & & (0) \\ & R_{t\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_{t\theta_q} \end{pmatrix} P^{-1} \end{array} \right.$$

◁ Comme $R_0 = I_2$, $\gamma(0) = PI_nP^{-1} = I_n$.

◁ De plus $\gamma(1) = A$.

◁ Par continuité de cos et sin, γ est continue (car continue sur toutes ses coordonnées), et on a bien $\operatorname{Im}\gamma \subseteq \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (par son expression, cela se vérifie immédiatement, en utilisant la réduction des isométries).

Théorème 11.3.8: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ est connexe par arcs

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \det A > 0\}$ est connexe par arcs.

Démonstration. Deux démonstrations possibles.

◁ Nous avons déjà proposé une démonstration de ce résultat à la Proposition 6.4.3, qui reposait sur un système de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

◅ Nous en proposons ici une autre, basée sur la décomposition polaire.
En effet pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A = PS$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Or $\det S > 0$.
— Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$, $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ car $\det P > 0$.
— Si $A = PS$ où $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det A > 0$.
Ainsi, $\tilde{\theta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (P,S) & \longmapsto & PS \end{array} \right.$ est une bijection continue.
Or, on sait que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ aussi car il est convexe. Donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ est convexe comme image d'un connexe par arcs par une application continue.

IV) Matrices de Gram-Schmidt

On considère dans cette partie un espace préhilbertien réel $(E, \langle . \mid . \rangle)$, c'est-à-dire un espace euclidien *ou* de dimension infinie.

A) Définition et premières propriétés ⋆⋆⋆

Définition 11.4.1: Matrice de Gram-Schmidt

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On définit la matrice de Gram-Schmidt de la famille $(x_1, \dots, x_n)$:

$$G = \mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i \mid x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On considère dans la suite une telle matrice G et une telle famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Lemme 11.4.2: Expression avec la matrice de la famille

Soit E_0 un sous-espace vectoriel contenant $(x_1, \dots, x_n)$ (ainsi $E_0 = E$ si E est de dimension finie).
Soit $e = (e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée de E et $A = \mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{d,n}(R)$, alors

$$G = A^\top A$$

Cette matrice mesure le caractère orthogonal, orthonormal ou libre de la famille. En effet :

◅ Si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale, G est diagonale.
◅ Si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthonormée, $G = I_n$.
◅ Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, $G \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ comme nous allons le montrer.

Lemme 11.4.3: Lien avec la liberté

$G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}\, G = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
Ainsi $G \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *si et seulement si* $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Démonstration. Par symétrie du produit scalaire, $G \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$Y^\top G Y = \sum_{(i,j)} y_i \langle x_i \mid x_j \rangle y_j = \left\| \sum_{i=1}^n y_i x_i \right\|^2 \geqslant 0$$

On en déduit que $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrons maintenant que $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n)$. Pour cela, remarquons que

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1} \alpha_i x_i = 0 \iff G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

- $\Rightarrow$: Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i \mid x_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid x_j \rangle = 0$ d'où $G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$
- $\Leftarrow$: Si $G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$, alors $0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2$ d'où $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$.

On en déduit la propriété souhaitée.

Remarque 11.4.4

Toute matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ s'écrit comme une matrice de GRAM.
En effet, toute matrice $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ s'écrit $G = B^\top B$. Ainsi si on note (x_i) les colonnes de B,

$$G = \operatorname{Gram}(x_1, \dots, x_n)$$

B) $\operatorname{Gram}(x_1, \dots, x_k) = \operatorname{Gram}(y_1, \dots, y_k)$ ⋆⋆⋆

Théorème 11.4.5: Deux familles de même matrice de GRAM ne diffèrent que d'une isométrie

Soit E un espace euclidien de dimension n, et e une base orthonormée de E.
Soient $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ et $(y_1, \dots, y_k) \in E^k$. Notons par ailleurs $A = \operatorname{Mat}_e(x_1, \dots, x_k)$ et $B = \operatorname{Mat}_e(y_1, \dots, y_k)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\operatorname{Gram}(x_1, \dots, x_k) = \operatorname{Gram}(y_1, \dots, y_k)$ ou $A^\top A = B^\top B$.
2. $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \langle x_i \mid x_j \rangle = \langle y_i \mid y_j \rangle$.

3. Il existe $\varphi \in \mathcal{O}(E)$, telle que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\varphi(x_i) = y_i$.
4. Il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $B = OA$.

Démonstration. ◁ (1) $\iff$ (2) : par définition.

◁ (3) $\Rightarrow$ (2) : évident.

◁ (3) $\iff$ (4) : évident, par traduction matricielle.

◁ (2) $\Rightarrow$ (3) : Posons $F_1 = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_k)$.
On a $\dim F_1 = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_k) = \mathrm{rg}\, G = \mathrm{rg}(y_1, \dots, y_k) = \dim F_2 = d$.
Quitte à renuméroter, considérons $(x_1, \dots, x_d)$ base de F_1. On pose :

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} F_1 & \longrightarrow & F_2 \\ x_i, 1 \leqslant i \leqslant d & \longmapsto & y_i \end{array} \right.$$

qui est bien définie car $(x_1, \dots, x_d)$ est une base de F_1.
De plus, φ_1 est bien une isométrie de F_1 vers F_2. En effet, pour $(x, x') \in F_1^2$, on a : $\langle \varphi(x) \mid \varphi(x') \rangle = \langle x \mid x' \rangle$ Donc c'est vrai en particulier pour les (x_i).
On prolonge ensuite φ_1 en $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ en envoyant une base orthonormée de $F_1^\perp$ sur une base orthonormée de $F_2^\perp$.
Il reste à montrer que pour $i \in [\![d+1, k]\!], \varphi(x_i) = y_i$. Soit donc un tel i, et notons $x_i = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_j$. Alors :

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j y_j \text{ donc } X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}\, G = \mathrm{Ker}(B^\top B) = \mathrm{Ker}\, B$$

Ainsi, $\sum_{j=1}^{d} \alpha_j y_j = y_i$. Ceci conclut la démonstration.

C) Distance d'un point à un sous-espace vectoriel en base non-orthonormée ⋆⋆

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F,

$$\forall x \in E, d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \langle x \mid e_j \rangle^2$$

où $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i$.
Nous allons généraliser cette expression de la distance, lorsque la base n'est plus nécessairement orthonormée, ni orthogonale.

Proposition 11.4.6: Généralisation

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $(z_1, \dots, z_n)$ une base de F non-orthonormée. Alors :

$$\forall x \in E, d(x, F) = \sqrt{\frac{\det(\mathrm{Gram}(x, z_1, \dots, z_d))}{\det(\mathrm{Gram}(z_1, \dots, z_n))}}$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors $x = p_F(x) + \omega$ où $p_F(x) \in F$ et $\omega \in F^\perp$.
Alors $d(x, F) = \|\omega\|^2$, et $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|\omega\|^2$.
De plus, pour $j \in [\![1, d]\!], \langle x \mid z_j \rangle = \langle p_F(x) \mid z_j \rangle$.

$$\det \mathrm{Gram}(x, z_1, \dots, z_d) = \begin{vmatrix} \|p_F(x)\|^2 + \|\omega\|^2 & \langle z_1 \mid p_F(x) \rangle & \dots & \langle z_d \mid p_F(x) \rangle \\ \langle p_F(x) \mid z_1 \rangle & & & \\ \vdots & & \mathrm{Gram}(z_1, \dots, z_d) & \\ \langle p_F(x) \mid z_d \rangle & & & \end{vmatrix}$$

$$\text{Or, } \begin{pmatrix} \|p_F(x)\|^2 + \|\omega\|^2 \\ \langle p_F(x) \mid z_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle p_F(x) \mid z_d \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|p_F(x)\|^2 \\ \langle p_F(x) \mid z_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle p_F(x) \mid z_d \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|\omega\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par n-linéarité du déterminant,

$$\det \mathrm{Gram}(x, z_1, \dots, z_d) = \begin{vmatrix} \|\omega\|^2 & * \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{Gram}(z_1, \dots, z_d) \\ 0 & \end{vmatrix} + \underbrace{\det(\mathrm{Gram}(p_F(x), z_1, \dots, z_d))}_{=0 \text{ car } p_F(x) \in \mathrm{Vect}(z_1, \dots, z_d)}$$

Finalement :

$$\det \mathrm{Gram}(x, z_1, \dots, z_d) = \|\omega\|^2 \mathrm{Gram}(z_1, \dots, z_d)$$

et on obtient le résultat souhaité.

V) Réduction des endomorphismes normaux

Définition 11.5.1: Endomorphisme normal

Soit E un espace euclidien. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Les endomorphismes symétriques, orthogonaux et antisymétriques sont normaux ; cela se vérifie immédiatement.

A) $A^\top A$ et $AA^\top$ sont semblables

Théorème 11.5.2

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AA^\top$ et $A^\top A$ sont semblables.

Démonstration. $A^\top A$ et $AA^\top$ sont symétriques donc diagonalisables. On note u et u^* les endomorphismes canoniquement associés à A et $A^\top$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)\setminus\{0\}$. Comme montré à la Proposition 5.1.22, pour $\lambda \neq 0$ les espaces $E_\lambda(AA^\top)$ et $E_\lambda(A^\top A)$ sont isomorphes. En particulier ils ont même dimension :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \dim E_\lambda(AA^\top) = \dim E_\lambda(A^\top A)$$

Or $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(AA^\top)} \dim E_\lambda(AA^\top) = \dim E$ et de même pour $A^\top A$. On en déduit que

$$\dim E_0(AA^\top) = \dim E_0(A^\top A)$$

Ainsi $A^\top A$ et $AA^\top$ sont orthogonalement semblables à la même matrice diagonale. On en conclut qu'elles sont semblables.

B) Généralités sur les endomorphismes normaux

Lemme 11.5.3: Lemmes utiles

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Soit F stable par u. Alors :

- F et $F^\perp$ sont tous deux stables par u et u^* ;
- $\tilde{u} = u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est normal.

Démonstration.

- On a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. Considérons $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$. En concaténant, on trouve une base orthonormée de E.
  Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_e(u)$. $M^\top M = MM^\top \iff C^\top C + D^\top D = DD^\top$. Ainsi,

  $$\mathrm{Tr}(C^\top C) + \mathrm{Tr}(D^\top D) = \mathrm{Tr}(DD^\top) = \mathrm{Tr}(D^\top D)$$

  d'où $\mathrm{Tr}(C^\top C) = 0$, soit $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} c_{ij}^2 = 0$. Cela amène pour tous i, j que $c_{ij} = 0$; d'où $C = 0$.
- On montre pour la deuxième propriété que $\tilde{u}^* = \tilde{u^*}$, c'est-à-dire que l'adjoint de l'induit est l'induit de l'adjoint. Soit $(x, y) \in F^2$.

  $$\langle \tilde{u}(x) \mid y \rangle = \langle x \mid \tilde{u^*}(y) \rangle$$

  Ainsi $\tilde{u}$ et $\tilde{u^*}$ commutent.

Théorème 11.5.4: Réduction des endomorphismes normaux

Soit u un endomorphisme normal. Alors, il existe e une base orthonormée de E, $d \in [\![0, n]\!]$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ et $q \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^{2q}$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_d & & & \\ & & & M_{a_1,b_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & M_{a_q,b_q} \end{pmatrix}$$

où $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Démonstration. On remarque en premier lieu que comme $u^*u = uu^*$, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par u et u^* donc $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u et par u^*.
Procédons ensuite par récurrence sur $\dim E = n$.

◅ Traitons le cas $n = 2$: Soit e une base orthonormée de E. Alors,

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, b \neq 0$$

Mais comme $u^*u = uu^*$, on a $a^2 + c^2 = a^2 + b^2$ et $ab + cd = ac + bd$.
Si $b = c$, l'endomorphisme est symétrique donc on a la forme voulue.
Sinon, $b = -c$, et u est antisymétrique. On a $2(a - d)b = 0$ d'où $a = d$ et ainsi $\mathrm{Mat}_e(u) = M_{a,b}$.

◅ Hérédité. Supposons le théorème vrai pour les endomorphismes normaux des espaces de dimensions $k \leqslant n - 1$.
On distingue 2 cas :

— $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$. On applique l'hypothèse de récurrence à $E_\lambda(u)^\perp$.
En effet si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par u et u^* donc $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u et par u^*. Alors d'après le lemme précedent, les endomorphismes $u_{|E_\lambda(u)}$ et $u^*_{|E_\lambda(u)^\perp}$ existent.
Alors en notant m_λ la multiplicité de λ comme valeur propre, on trouve deux bases orthonormées e_1 et e_2 telles que :

$$\mathrm{Mat}_{e_1}(u)(u_{|E_\lambda(u)}) = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_\lambda}(\mathbb{R})$$

$$\mathrm{Mat}_{e_2}(u)(u_{|E_\lambda(u)^\perp}) = A \text{ de la forme souhaitée}$$

Comme $E = E_\lambda(u) \overset{\perp}{\oplus} E_\lambda(u)^\perp$, on a

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} \lambda I_{m_\lambda} & (0) \\ (0) & A \end{pmatrix} \text{ qui est de la forme souhaitée}$$

— $\mathrm{Sp}(u) = \varnothing$. Trouvons F un plan stable par u et u^*.
Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, d'après la Proposition 5.5.7, on trouve un plan stable par u de la forme $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$.
Par les lemmes précédents, F et $F^\perp$ sont stables par u et u^* et donc les endomorphismes induits sont normaux.
On conclut en leur appliquant l'hypothèse de récurrence et en concaténant les bases orthonormées obtenues.

C) Cas particulier des antisymétriques

On note par ailleurs $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Si A est une telle matrice, le théorème de réduction des normaux et le fait que $A^\top + A = 0$ amènent qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $(b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^q$,

$$A = P^\top \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -b_q \\ (0) & & & & & & b_q & 0 \end{pmatrix} P$$

Lemme 11.5.5: Spectre d'un antisymétrique

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq \{0\} \cup \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Soit X un vecteur propre complexe associé. Alors, $AX = \lambda X$ donc

$$\mu = \overline{X}^\top AX = \lambda \overline{X}^\top X = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0}$$

Or, $\overline{\mu} = \overline{\mu}^\top = \overline{X}^\top \overline{A}^\top X$. Or $\overline{A}^\top = A^\top = -A$. Ainsi $\overline{\mu} = -\mu$.
Ainsi, $\mu \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et $\lambda = \dfrac{\mu}{\|X\|^2} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Proposition 11.5.6: Rang d'un antisymétrique

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{rg}\, A$ est pair.

Démonstration. Considérons u l'endomorphisme canoniquement associé.
On a $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}(u^*)^\perp = \mathrm{Im}(-u)^\perp = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$. $E = \mathrm{Ker}\, u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, u$.
Donc $\mathrm{Im}\, u$ est un supplémentaire du noyau stable par u. L'endomorphisme induit $\tilde{u}$ est un isomorphisme et est encore antisymétrique. Donc :

$$0 \neq \det \tilde{u} \det(\tilde{u}^*) = \det(-\tilde{u}) = (-1)^{\mathrm{rg}\, u} \det \tilde{u}$$

D'où $(-1)^{\operatorname{rg} u} = 1$ et $\operatorname{rg} u$ est pair.

VI) Matrices de covariance ⋆⋆

Théorème 11.6.1: Caractérisation des matrices de covariances

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. $\exists (X_1, \dots, X_n)$, des variables aléatoires réelles telles que
$$A = (\operatorname{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
3. $\exists (X_1, \dots, X_n)$, des variables aléatoires réelles telles que
$$A = (\mathbb{E}(X_i X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Démonstration. ◅ (2) ⇒ (1) : A est symétrique car pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \operatorname{Cov}(X_j, X_i)$.

De plus pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} Y^\top A Y &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} y_i \operatorname{Cov}(X_i, X_j) y_j \\ &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j \right) \\ &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i \right) \geqslant 0 \end{aligned}$$

D'où $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

◅ (3) ⇒ (1) : de même, pour $Y \in \mathbb{R}^n$,

$$Y^\top A Y = \sum_{(i,j)} y_i y_j \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i \right)^2 \right) \geqslant 0$$

◅ (1) ⇒ (2) :

— On traite d'abord le cas $A = I_n$. En considérant $(Z_1, \dots, Z_n)$ i.i.d. des variables de Rademacher, on a pour $i \neq j$, $\operatorname{Cov}(Z_i, Z_j) = 0$ par indépendance.
$\forall i \in [\![1,n]\!], \mathbb{V}(Z_i) = \mathbb{E}(Z_i^2) = 1$.

— Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On peut écrire :

$$A = M^\top M = M^\top I_n M = M^\top (\operatorname{Cov}(Z_i, Z_j))_{i,j} M$$

Dans ce cas, pour $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$,

$$a_{i,j} = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} m_{ki}\mathrm{Cov}(Z_k,Z_l)m_{lj} = \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} m_{ki}Z_k, \sum_{l=1}^{n} m_{lj}Z_l\right)$$

En posant $X_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}Z_k$, on a bien $a_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.

$\lhd$ (2) $\Rightarrow$ (3) : les (X_i) sont centrées.

Corollaire 11.6.2: Produit d'Hadamard de matrices symétriques

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors $C = (a_ib_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. Par le théorème précédent, on trouve $(X_1,\dots,X_n,X_1',\dots,X_n')$ des variables aléatoires telles que :

$$A = (\mathrm{Cov}(X_i,X_j))_{i,j} \text{ et } B = (\mathrm{Cov}(X_i',X_j'))_{i,j}$$

Par lemme des coalitions, comme les (X_i) et les (X_i') sont indépendants, pour $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$,

$$c_{ij} = a_{ij}b_{ij} = \mathbb{E}(X_iX_j)\mathbb{E}(X_i'X_j') = \mathbb{E}((X_iX_i')(X_jX_j')) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

par (3) $\Rightarrow$ (1).

Proposition 11.6.3

$\det(\mathrm{Cov}(X_i,X_j))_{1\leqslant i,j\leqslant d} = 0$ *si et seulement si* il existe un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que $(X \in \mathcal{H})$ soit presque sûr.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\det \mathrm{Cov}(X) &\iff \mathrm{Ker}(\mathrm{Cov}(X_i,X_j))_{1\leqslant i,j\leqslant d}) \neq \{0_{\mathbb{R}^d}\}\\
&\iff \exists \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d\backslash\{0_{\mathbb{R}^d}\}, (\mathrm{Cov}(X_i,X_j))_{1\leqslant i,j\leqslant d}) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = 0\\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}, \mathbb{V}\left(\sum_{j=1}^{d} a_jX_j\right) = 0\\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}, \exists c \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{d} a_jX_j = c\right) = 1\\
&\iff \exists \mathcal{H} \text{ hyperplan affine de } \mathbb{R}^d \text{ tel que } \mathbb{P}(X \in \mathcal{H}) = 1
\end{aligned}$$

Chapitre 12

Analyse différentielle

I) Propriétés algébriques de l'exponentielle de matrices

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On ne rappelle pas la définition de l'exponentielle de matrices, ainsi que les propriétés de base : exponentielle d'une matrice diagonale, transposée de l'exponentielle, $e^{P^{-1}AP}$, dérivée de $t \mapsto e^{tA}$.

A) Convergences ⋆⋆⋆⋆

Théorème 12.1.1: Limite classique

Pour $k \geqslant 1$, $f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \left(I_n + \dfrac{A}{k}\right)^k \end{array} \right.$ converge uniformément sur tout compact vers exp.

Démonstration. Sur $\mathbb{R}$, le résultat est bien connu. En effet, pour $k > |x|$,

$$f_k(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right) = \exp\left(k\left(\frac{x}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^x$$

Maintenant, démontrons le résultat pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $S_k : A \longmapsto \sum_{j=0}^{k} \frac{A^k}{k!}$. Il est connu et au programme que $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers exp. Soit

$A \in \overline{B}(0,R)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|S_k(A) - f_k(A)\| &= \left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{A^k}{k!} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{A^j}{k^j} \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{\prod_{i=0}^{j-1}(k-i)}{k^j} \right) A^j \right\| \\
&\overset{\text{IT}}{\leqslant} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left| \prod_{i=0}^{j-1} \underbrace{\frac{k-i}{k}}_{\in]0,1[} \right| \|A\|^j \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{k-i}{k} R^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{R^j}{j!} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{R^j}{k^j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{R^j}{j!} - \left(1 + \frac{R}{k} \right)^k
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sup_{A \in \overline{B}(0,R)} \|S_k(A) - f_k(A)\| \leqslant \sum_{j=0}^{k} \frac{R^j}{j!} - \left(1 + \frac{R}{k} \right)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} e^R - e^R = 0$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\sup_{A \in \overline{B}(0,R)} \left\| f_k(A) - e^A \right\| &\leqslant \sup_{A \in \overline{B}(0,R)} \left\| f_k(A) - S_k^A \right\| + \sup_{A \in \overline{B}(0,R)} \left\| S_k(A) - e^A \right\| \\
&\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

D'où la convergence uniforme vers exp sur tout segment.

Lemme 12.1.2: Composition de limites réelles et fonctionnelles

Si $(f_k) \in \mathcal{C}^0(E,F)^{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément au voisinage de $x_0 \in E$, et que $(x_k) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers x_0, alors

$$f_k(x_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(x_0)$$

Démonstration. Notons V le voisinage de x_0 sur lequel on a convergence uniforme.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $x_k \in V$.
Soit $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant K$, $\sup_{x \in V} \|f_k(x) - f(x_0)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pour $k \geqslant \max(K,N)$,

$$|f_k(x_k) - f(x_0)| \leqslant \|f_k(x_k) - f(x_k)\| + \|f(x_k) - f(x_0)\| \leqslant \varepsilon$$

ce qui conclut.

Proposition 12.1.3: e^{A+B} en cas de non-commutativité

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{A+B}$$

Démonstration. L'idée est de faire un "DL matriciel" et d'écrire $e^{\frac{A}{k}} = I_n + \frac{A}{k} + \mathcal{O}_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Mais comme il s'agit de matrices, il faut prendre des précautions et donc prouver formellement les dominations / négligeabilités en jeu.
Montrons donc que $k^2 \left\| e^{\frac{A}{k}} - I_n - \frac{A}{k} \right\|$ est borné si $k \to +\infty$:

$$k^2 \left\| e^{\frac{A}{k}} - I_n - \frac{A}{k} \right\| = \left\| \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{A^j}{k^{j-2} j!} \right\| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\|A\|^j}{j!} = e^{\|A\|} - \|A\| - 1 = C \in \mathbb{R}_+$$

Ainsi $\left\| e^{\frac{A}{k}} - I_n - \frac{A}{k} \right\| = \mathcal{O}_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Ecrivons donc :

$$e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} = I_n + \frac{A+B}{k} + \mathcal{O}_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right) = I_n + \frac{A+B+\delta_k}{k^2}, \text{ où } \delta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

Donc

$$\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k = \left(I_n + \frac{A+B+\delta_k}{k}\right)^k = f_k(A+B+\delta_k)$$

avec (f_k) qui converge uniformément vers exp sur tout compact et $A+B+\delta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A+B$ donc d'après le lemme précédent, $f_k(A+B+\delta_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{A+B}$.
On conclut donc que $\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{A+B}$.

Proposition 12.1.4: e^M est polynomiale en M

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $e^M \in \mathbb{K}[M]$.

Démonstration. $e^M = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{M^j}{j!} \in \overline{\mathbb{K}[M]} = \mathbb{K}[M]$ car $\mathbb{K}[M]$ est fermé comme espace vectoriel de dimension finie.

Attention néanmoins, $e^M = P_M(M)$ avec $P_M \in \mathbb{K}[X]$ mais P_M dépend bien de M.

B) Algèbres de Lie ⋆⋆⋆

Définition 12.1.5: Algèbre de Lie

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. L'algèbre de Lie associée à G est :

$$\mathcal{G}(G) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} \in G\right\}$$

Proposition 12.1.6: $\mathcal{G}(G)$ est un sous-espace vectoriel

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{G}(G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{G}(G)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ◁ Si $\alpha = 0$: $\forall t \in \mathbb{R}, e^{(t\alpha)A} = e^0 = I_n \in G$.
- ◁ Si $\alpha \neq 0$:
  D'une part, $\forall t \in \mathbb{R}, e^{(t\alpha)A} \in G$ car $A \in \mathcal{G}(G)$ d'où $\alpha A \in G$.
  D'autre part, montrons que si $B \in \mathcal{G}(G)$, alors $A+B \in \mathcal{G}(G)$. On utilise la Proposition 12.1.3.
  En effet pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e^{\frac{tA}{k}}, e^{\frac{tB}{k}} \in G$ donc par loi de groupe, $\left(e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{tB}{k}}\right)^k \in G$. Mais G est fermé donc :
  $$\forall t \in \mathbb{R}, \left(e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{tB}{k}}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{t(A+B)} \in G$$
  Ainsi, $A + B \in \mathcal{G}(G)$.

On conclut donc que $\mathcal{G}(G)$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple 12.1.7: Exemples d'algèbres de Lie

◁ $\mathcal{G}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$

Soit $A \in \mathcal{G}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 = \det(e^{tA}) = e^{t\,\mathrm{Tr}(A)}$ d'où $\mathrm{Tr}\,A = 0$. La réciproque est claire.

◁ $\mathcal{G}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors pour $t \in \mathbb{R}$, $tA \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $(e^{tA})^\top = e^{tA^\top} = e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$. Ainsi $e^{tA} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Si $A \in \mathcal{G}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$, posons $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$e^{tA} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff (e^{tA})^\top e^{tA} = I_n \iff e^{tA^\top} e^{tA} = I_n$$

En dérivant par rapport à t, $e^{tA^\top} A^\top e^{tA} + e^{tA^\top} A e^{tA} = 0$ et en évaluant en $t = 0$, $A^\top + A = 0$, d'où $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

C) Injectivité, surjectivité ⋆⋆⋆

C.1 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Remarque 12.1.8: Non-injectivité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ n'est pas injective.

En effet $e^{2i\pi I_n} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{2i\pi} \end{pmatrix} = I_n = e^0$.

Théorème 12.1.9: Surjectivité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\exp \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) :\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Démonstration. On construit l'antécédent à la main en "passant au ln". On traite plusieurs cas de plus en plus généraux :

◅ $A = I_n + N$ avec N nilpotente :
On cherche donc $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $I_n + N = e^M$ *(artificiellement, "$M = \ln(I_n + N)$")*.
On conjecture avec l'idée du logarithme naturel que

$$M = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} N^k}{k} = NQ_0(N), Q(N) \in \mathbb{C}[N]$$

qui commute donc avec N. Ainsi,

$$M^n = N^n Q_0(N)^n = 0$$

Or, on en déduit que $e^M = P(M)$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$. Ainsi, $e^M = P \circ Q(N)$ où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} X^k}{k}$.
On montre maintenant que $I_n + N = P \circ Q(N)$, en comparant les parties principales des développements limités (classique).
On a : $\begin{cases} e^x & = P(x) + o_{x\to 0}(x^{n-1}) \\ \ln(1+x) & = Q(x) o_{x\to 0}(x^{n-1}) \end{cases}$ donc par composition, $1+x = (PQ)(x) + o_{x\to 0}(x^{n-1})$. Par unicité de la partie principale d'un DL :

$$1 + X = (PQ)(X) - X^n R(X) \text{ dans } \mathbb{C}[X]$$

Ainsi, $P \circ Q(N) = I_n + N + N^n R(N) = I_n + N$ par nilpotence. Ainsi, $e^M = I_n + N$.

◅ $A = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente et $\lambda \in \mathbb{C}^*$: On dipose de $\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda = e^\mu$ par surjectivité de exp dans $\mathbb{C}$.

Alors, $A = e^\mu \left(I_n + \underbrace{\frac{1}{\lambda} N}_{\text{nilpotente}} \right) = e^\mu e^M = e^{\mu I_n + M}$ d'après le premier cas.

◁ Cas général, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: décomposition en sous-espaces caractéristiques.

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} + N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{d_r} + N_r \end{pmatrix} P$$

où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{C}^*$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $N_1, \dots, N_r$ nilpotentes.
Pour $j \in [\![1, r]\!]$, $\lambda_j I_{d_j} + N_j = e^{M_j}$. Par le deuxième cas, $A = e^M$ où

$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_r \end{pmatrix} P$$

C.2 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque 12.1.10: Non-injectivité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas injective.
En effet avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$, $e^A = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) & -\sin(2\pi) \\ \sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{pmatrix} = I_2 = e^0$.

Remarque 12.1.11: Non-surjectivité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\exp \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.
En effet $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}\, A} > 0$ donc toute matrice de déterminant strictement négatif n'admet pas d'antécédent.

Exercice 12

Montrer que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A = B^2\right\}$.

D) Application à un problème d'optimisation ⋆⋆⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \max_{O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}(OM)$$

Proposition 12.1.12: Bonne définition et continuité

φ est bien définie et continue.

Démonstration. L'existence du maximum provient du fait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (Proposition 6.6.7), et que la trace est continue.
Montrons que φ est continue. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

telles que $\varphi(O_1) = M_1$ et $\varphi(O_2) = M_2$.
Par continuité de la trace, soit $\delta > 0$ tel que si $\|\|A - B\|\| \leqslant \delta$, alors $|\mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B)| \leqslant \varepsilon$. Alors, si $\|\|M_1 - M_2\|\| \leqslant \delta$, on a :

$$\|\|O_1M_1 - O_1M_2\|\| \leqslant \underbrace{\|\|O_1\|\|}_{=1} \|\|M - 1 - M_2\|\| \leqslant \varepsilon$$

De même, $\|\|O_2M_1 - O_2M_2\|\| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $|\mathrm{Tr}(O_1M_1) - \mathrm{Tr}(O_1M_2)| \leqslant \varepsilon$ et $|\mathrm{Tr}(O_2M_1) - \mathrm{Tr}(O_2M_2)| \leqslant \varepsilon$

- ◅ D'une part $\varphi(M_2) \geqslant \mathrm{Tr}(O_1M_2) \geqslant \mathrm{Tr}(O_1M_1) - \varepsilon = \varphi(M_1) - \varepsilon$.
- ◅ D'autre part $\varphi(M_2) \leqslant \mathrm{Tr}(O_2M_1) + \varepsilon \leqslant \mathrm{Tr}(O_1M_1) + \varepsilon = \varphi(M_1) + \varepsilon$.

Finalement $|\varphi(M_1) - \varphi(M_2)| \leqslant \varepsilon$, et on conclut.

Théorème 12.1.13: Méthode très classique

Si φ atteint son maximum en O, alors $OM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(OM)$ soit le maximum de φ. Montrons que $OM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- ◅ On considère, pour A antisymétrique, le chemin $\boxed{\gamma : t \longmapsto \mathrm{Tr}(e^{tA}OM)}$, qui est $\mathcal{C}^1$ comme composée d'applications $\mathcal{C}^1$.
- ◅ γ atteint son maximum en $t = 0$. En effet pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car A est antisymétrique :
$$\left(e^{tA}\right)^\top = e^{tA^\top} = e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1}$$
Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = \mathrm{Tr}(e^{tA}OM) \leqslant \mathrm{Tr}(OM) = \gamma(0)$.
- ◅ Ainsi, on a $\gamma'(0) = 0$. Or, $\gamma'(t) = \mathrm{Tr}(Ae^{tA}OM)$. Ainsi,
$$\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AOM) = 0$$
On en déduit que $OM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En effet, pour le produit scalaire $\langle B \mid C\rangle = \mathrm{Tr}(B^\top C)$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$. Il reste seulement à montrer que OM est positive.
- ◅ On diagonalise OM en base orthonormée, par théorème spectral. On trouve $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,
$$OM = P^\top \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=D} P$$
On veut montrer que : $\forall i \in [\![1\,,n]\!], \lambda_i \geqslant 0$. Si par l'absurde on dispose de $i_0 \in [\![1\,,n]\!]$, $\lambda_{i_0} < 0$, posons la matrice
$$O_{i_0} = \mathrm{diag}(1, \ldots, \overbrace{-1}^{i_0}, \ldots, 1) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$
Alors
$$\mathrm{Tr}(P^T O_{i_0} P(OM)) = \mathrm{Tr}(O_{i_0}P(OM)P^T) = \mathrm{Tr}(O_{i_0}D) = -\lambda_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} \lambda_j > \mathrm{Tr}(OM)$$
ce qui est absurde.

Finalement $OM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

E) Morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ⋆⋆

Lemme 12.1.14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\theta_A : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\times) \\ t & \longmapsto & e^{tA} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes continu.

Démonstration. ◁ θ_A est un morphisme : pour tous $t,s \in \mathbb{R}$, tA et sA commutent, doù $\theta_A(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = \theta_A(t)\theta_A(s)$.

◁ θ_A est continue, et même $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème de dérivation des exponentielles de matrices.

Théorème 12.1.15: Caractérisation des morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\times) \\ t & \longmapsto & \varphi(t) \end{array} \right.$ un morphisme de groupes continu. Alors :

◁ φ est une application $\mathcal{C}^1$.

◁ De plus, $\varphi : s \mapsto e^{s\varphi'(0)}$

Démonstration. ◁ Montrons tout d'abord le caractère $\mathcal{C}^1$. On montre pour cela que φ s'exprime comme l'intégrale d'une fonction continue.
Pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2, \varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$. Pour $s_0 \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\int_0^{s_0} \varphi(t+s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{s_0} \varphi(t)\varphi(s)\,\mathrm{d}s = \varphi(t)\int_0^{s_0} \varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

On montre ensuite qu'on peut trouver un $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{s_0} \varphi(s)\,\mathrm{d}s \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
$\varphi(0) = I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui est un ouvert donc on dispose de $\delta > 0$, $\overline{B}(I_n,\delta) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Par continuité de φ, on fixe $\eta > 0$ tel que pour $|s| \leqslant \eta$,

$$\|\varphi(s) - I_n\| = \|\varphi(s) - \varphi(0)\| \leqslant \delta$$

Ainsi pour $s_0 \in \left]0\,,\eta\right[$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{s_0}\int_0^{s_0} \varphi(s)\,\mathrm{d}s - I_n \right\| &= \left\| \frac{1}{s_0}\int_0^{s_0} \varphi(s) - I_n\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\overset{\text{IT}}{\leqslant} \frac{1}{|s_0|}\left| \int_0^{s_0} \|\varphi(s) - I_n\|\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant \frac{1}{s_0}\int_0^{s_0} \delta\,\mathrm{d}s = \delta \end{aligned}$$

Ainsi $\frac{1}{s_0}\int_0^{s_0}\varphi(s)\,\mathrm{d}s \in \overline{B}(I_n,\delta) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Finalement, pour $t\in\mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \int_0^{s_0}\varphi(t+s)\,\mathrm{d}s\left(\frac{1}{s_0}\int_0^{s_0}\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)^{-1}$$

Donc φ est $\mathcal{C}^1$.

◁ On sait que

$$\forall (t,s)\in\mathbb{R}^2, \varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s)$$

On dérive à $s\in\mathbb{R}$ fixé, par rapport à t :

$$\forall s\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}, \varphi'(t+s)=\varphi'(t)\varphi(s)$$

On évalue alors en $t=0$: $\forall s\in\mathbb{R}, \varphi'(s)=\varphi'(0)\varphi(s)$ et $\varphi(0)=I_n$.
Finalement, $s\mapsto e^{s\varphi'(0)}$ est solution. De plus elle est unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. On en conclut que $\varphi : s\mapsto e^{s\varphi'(0)}$.

II) Équations différentielles

A) Wronskien

A.1 Wronskien de deux solutions (au programme) ⋆⋆⋆⋆

On considère l'équation $(E) : y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=0$, où p et q sont continues de I dans $\mathbb{K}$. On a alors, si (y_1,y_2) sont deux solutions de (E),

$$W : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}\end{array}\right.$$

Par ailleurs, on remarque qu'avec les notations du cas général $A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{pmatrix}$.

Théorème 12.2.1

W est solution de $W'(t)+p(t)W(t)=0$.

Démonstration. Comme y_1 et y_2 sont deux fois dérivables, W est une fois dérivable.
$W=y_1y_2'-y_1'y_2$ donc $W'=\underbrace{y_1'y_2'-y_1'y_2'}_{=0}+y_1y_2''-y_1''y_2$. On a donc :
$W=y_1(-py_2'-qy_2)-(-py_1-qy_1)y_2=-p(y_1y_2'-y_1'y_2)=pW$.

Corollaire 12.2.2: Cas particulier

Si $p=0$, c'est-à-dire dans le cas où $(E) : y''+qy=0$, W est constante.

Démonstration. W est solution de $W'=0$.

Exemple 12.2.3: Application : recherche d'une solution non-bornée

Considérons pour $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, R)$ intégrable, $(E) : y'' + qy = 0$. Montrer que (E) a une solution non-bornée.

◁ Soit y une solution de (E). Alors $y'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

En effet, $y'' = -qy$ est intégrable. Comme $\int_0^{+\infty} y''$ converge, y' a une limite finie ℓ en $+\infty$.
Si $\ell > 0$ (quitte à prendre $-y$), on dispose de $A \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant An$

$$y'(t) \geqslant \frac{\ell}{2} \text{ donc } y(t) \geqslant \frac{\ell}{2}(t-1) + y(A) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui est impossible. Ainsi $\ell = 0$.

◁ Ainsi, si par l'absurde y_1 et y_2 sont solutions bornées de (E), $W(t) = (y_1 y_2' - y_1 y_2)(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. C'est absurde car $W(t) = C$ constante non-nulle.

A.2 Méthode d'abaissement du degré ⋆⋆⋆

On considère toujours l'équation $(E) : y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$, où p et q sont continues de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que l'on connaît une solution y_1. On cherche y_2 telle que (y_1, y_2) génère l'espace des solutions $\mathcal{S}_0$

Méthode 12.2.4: Abaissement du degré

On cherche, sur des intervalles où y_1 ne s'annule pas, y_2 sous la forme

$$y_2 : t \longmapsto \lambda(t) y_1(t)$$

Ainsi, y_2 est solution de (E) *si et seulement si*

$$\underbrace{\lambda(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{=0 \text{ car } y_1 \in \mathcal{S}_0} + \lambda'(2y_1' + py_1) + \lambda'' y_1 = 0$$

Finalement, on doit résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en λ'. On résout puis on intègre pour trouver λ.

A.3 Cas général ⋆⋆

Considérons l'équation différentielle $(E) : X'(t) = A(t)X(t)$, avec $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 12.2.5: Wronskien de n solutions

Soient $(Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{S}_0^n$. Le wronskien de ces n solutions est l'application :

$$W : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \det(Y_1(t), \dots, Y_n(t)) \end{array} \right.$$

Lemme 12.2.6: Une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $(Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{S}_0^n$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$.
2. Il existe $t_0 \in I$, $W(t_0) \neq 0$.
3. Pour tout $t_0 \in I$, $W(t_0) \neq 0$.

Démonstration. $\lhd$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) : toujours vrai.

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (3) : Considérons $\theta_{t_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & X(t_0) \end{array} \right.$ qui est un isomorphisme d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, il envoie toute famille libre de $\mathcal{S}_0$ sur une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

Théorème 12.2.7: Equation différentielle vérifiée par W

W ainsi défini est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$W'(t) = \operatorname{Tr}(A(t))W(t)$$

Démonstration. L'application W est n-linéaire. Donc pour $t \in I$,

$$W'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det(Y_1(t), \dots, Y_j'(t), \dots, Y_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} \det(Y_1(t), \dots, A(t)Y_j(t), \dots, Y_n(t))$$

On suppose que $(Y_1, \dots, Y_n)$ est libre (sinon le résultat est évident). D'après le lemme précédent, pour $t \in I$, $W(t) \neq 0$. Ainsi $e_t = (Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

$$W'(t) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\det_{\text{b.c.}}(e_t)}_{=W(t)} \det_{e_t}(Y_1(t), \dots, A(t)Y_j(t), \dots, Y_n(t))$$

$$= W(t) \sum j = 1^n \begin{vmatrix} 1 & & & \alpha_{1j} & & \\ & \ddots & & \vdots & & (0) \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha_{jj} & & \\ & & & & 1 & \\ & (0) & & \vdots & & \ddots \\ & & & \alpha_{nj} & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= W(t) \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj}$$

où $A(t)Y_j(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} Y_i(t)$. Finalement, la trace étant un invariant de similitude, $W'(t) = W(t) \operatorname{Tr}(A(t))$.

Corollaire 12.2.8: Expression de W

$$W \ : \ t \longmapsto W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right)$$

Démonstration. Immédiat d'après le cours.

B) Résolution de $y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)} = 0$ ⋆⋆⋆

Posons $P = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} X^j = \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$ dans $\mathbb{C}[X]$, et

$$(E) \ : \ y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)} = 0$$

Proposition 12.2.9: Cas où P est SARS

Si P est scindé à racines simples, $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ t \mapsto \sum_{j=1}^{n} \beta_j e^{t\lambda_j}, (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n \right\} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{t\lambda_j}\right)_{j \in [\![1,n]\!]}$

Démonstration. Soit $Y = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Alors y est solution de E si et seulement si Y est solution de

$$Y' = AY \text{ où } A = C_P^\top = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}^\top$$

Dans ce cas, comme $\chi_A = P$, d'après le Théorème 5.3.6, A est diagonalisable.

D'après le cours, Y est de la forme $Y : t \mapsto e^{tA} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{z_j e^{t\lambda_j}}_{=\beta_j} C_j$, avec $(C_1, \dots, C_n)$ une base de vecteurs propres de A.

Ainsi, $y : t \mapsto \sum_{j=1}^{n} \beta_j e^{t\lambda_j}$ est solution de (E). Réciproquement, pour tout j, $t \mapsto e^{t\lambda_j}$ est solution de (E).

Théorème 12.2.10: Cas général

$$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ t \mapsto \sum_{j=1}^{n} P_j(t) e^{t\lambda_j} \mid \forall j \in [\![1\,,d]\!]\,, P_j \in \mathbb{C}_{m_j-1}[X] \right\}$$

Démonstration. Considérons $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y' \end{array} \right.$. Alors

$$y \in \mathcal{S}_{(E)} \iff P(D)(y) = 0$$

On en déduit que

$$\mathcal{S}_{(E)} = \mathrm{Ker}(P(D)) = \bigoplus_{j=1}^{d} \underbrace{\mathrm{Ker}((X-\lambda_j)^{m_j}(D))}_{=F_j} \text{ par théorème des noyaux}$$

Chaque F_j est l'ensemble des solutions d'une EDL d'ordre m_j donc pour $j \in [\![1\,,d]\!]$, F_j est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m_j. De plus,

$$\mathrm{Vect}(t \mapsto t^k e^{t\lambda_j})_{0\leqslant k\leqslant m_j-1} = F_j$$

En effet, pour $k \in [\![0\,, m_j-1]\!]$,si $f_k : t \longmapsto t^k e^{t\lambda_j}$, on a $(X-\lambda_j)(D)(f_k) = f_k' - \lambda f_k k t^{k-1} e^{\lambda_j t}$. Donc comme $k \leqslant m_j - 1$, $(X-\lambda_j)^{m_j}(D)(f_k) = 0$. On a donc bien $f_k \in F_j$. De plus $\dim \mathrm{Vect}(t \mapsto t^k e^{t\lambda_j})_{0\leqslant k\leqslant m_j-1} = m_j$ d'où l'égalité.

C) Étude des zéros d'une EDL d'ordre 2

C.1 Principe des zéros isolés ⋆⋆⋆

Théorème 12.2.11: Zéros isolés

Soit $(E) : y'' + py' + q = 0$. Alors toute solution non-nulle de (E) a ses zéros isolés. C'est-à-dire que pour tout $x_0 \in I$:

$$y(x_0) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, \forall x \in]x_0 - \delta\,, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}\,, y(x) \neq 0$$

Démonstration. La fonction nulle est la seule solution de (E) vérifiant $\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{array} \right.$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.
Donc si y est une solution non-nulle de (E) s'annulant en x_0, $y'(x_0) \neq 0$.

Par exemple, $y'(x_0) > 0$. Or, $\dfrac{y(x) - \overbrace{y(x_0)}^{=0}}{x - x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} y'(x_0) > 0$. Ainsi, on dispose de $\delta > 0$ tel que pour $x \in]x_0 - \delta\,, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $\dfrac{y(x)}{x - x_0} > 0$.
A fortiori, $y(x) \neq 0$.

C.2 Entrelacement de zéros ⋆⋆⋆

Considérons, pour q_1 et q_2 deux fonctions continues sur I telles que $q_1 \leqslant q_2$:

$$(E_1) : y'' + q_1 y = 0 \text{ et } y'' + q_2 y = 0$$

Soient y_1 et y_2 solutions de (E_1) et de (E_2) telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$.

On introduit une nouvelle notion pour étudier ces deux solutions :

Définition 12.2.12: Wronskien mixte

On pose $W : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \end{array} \right.$ le wronskien mixte de y_1 et y_2.

Il diffère du wronskien tel qu'abordé précédemment. En effet, y_1 et y_2 sont solutions de deux EDL différentes.

Lemme 12.2.13: Propriétés du wronskien mixte

Soit W le wronskien mixte associé à y_1 solution de (E_1) et y_2 solution de (E_2). Alors :

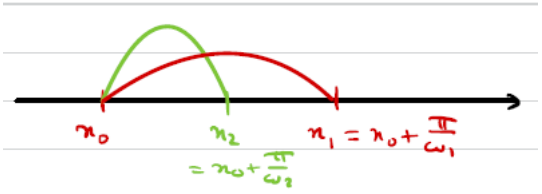
- $W \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.
- $W' = (q_1 - q_2) y_1 y_2$.

Démonstration. Le caractère $\mathcal{C}^1$ provient du fait que pour $t \in I$, $W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$, avec y_1 et y_2 qui sont $\mathcal{C}^2$.
Ensuite, $W'' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = (q_1 - q_2) y_1 y_2$.

Proposition 12.2.14: Entrelacement

Soit x_1 un zéro consécutif de x_0 (c'est-à-dire y_1 ne s'annule pas sur $]x_0\,, x_1[$).
Alors y_2 s'annule sur $]x_0\,, x_1]$

Voici une illustration de cettre proposition dans le cas où $q_1(t) = \omega_1^2$ et $q_2(t) = \omega_2^2$. Notons que dans ce cas on connaît aisément les solutions de (E_1) et (E_2), ce sont des oscillateurs harmoniques.



Ici, y_1 s'annule en x_0 et x_1 et y_2 s'annule en x_2. Démontrons-le dans le cas général

Démonstration. On a $W(x_0) = 0$ car x_0 est un zéro commun à y_1 et y_2. On suppose $y_1 > 0$ sur $]x_0\,,x_1[$.
Par l'absurde, supposons que y_2 ne s'annule pas sur $]x_0\,,x_1]$. Sans perte de généralité, $y_2 > 0$ sur $[x_0\,,x_1]$. Ainsi ,

$$W' = (q_1 - q_2)y_1y_2 \leqslant 0$$

W est donc décroissante sur $[x_0\,,x_1]$. Mais $W(x_1) = -y_1'(x_1)y_2(x_1)$, avec $y_2(x_1) > 0$.
Or, $y_1'(x_1) < 0$. En effet, $y_1 > 0$ sur $[x_0\,,x_1]$ et s'annule en x_0. Si on avait $y_1'(x_1) \geqslant 0$, y_1 serait nulle sur $[x_0\,,x_1]$ donc sur tout I par Cauchy-Lipschitz.
En conclusion, $W(x_1) > 0$, cela contredit la décroissance de W. Ainsi, y_2 s'annule sur $]x_0\,,x_1]$.

Exemple 12.2.15: Application à l'encadrement de l'écart entre les zéros

Si y est telle que $y'' + qy = 0$ avec $m \leqslant q \leqslant M$ où $0 < m \leqslant M$, et que x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de y, montrer que

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant x_1 - x_0 \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

◅ Posons les équations harmoniques "limites" :

$$(E_1) : \begin{cases} y'' + my = 0 \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \quad \text{et } (E_2) : \begin{cases} y'' + My = 0 \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

◅ $y_1 : x \longmapsto \sin(\sqrt{m}(x - x_0))$ est solution de (E_1). x_0 et $x_0 + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$ sont deux zéros consécutifs de y_1.
On applique alors ce qui précède à y et y_1. Comme $q \geqslant m$, $x_1 \leqslant x_0 + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$.

◅ De même, $y_2 : x \longmapsto \sin(\sqrt{M}(x - x_0))$ est solution de (E_2) ; x_0 et et $x_0 + \dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$ sont deux zéros consécutifs de y_2.
Comme $q \leqslant M$, $x_0 + \dfrac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant x_1$.

◅ On obtient l'encadrement souhaité.

C.3 $y'' + qy = 0$ avec $q \leqslant 0$ ⋆⋆⋆

Proposition 12.2.16: Majoration du nombre de zéros

Toute solution non-identiquement nulle de $y'' + qy = 0$ avec $q \leqslant 0$ s'annule au plus une fois.

Démonstration. D'une part, y^2 est convexe car $(y^2)' = 2yy'$ et $(y^2)'' = 2yy'' + (y')^2 = -2qy^2 + 2y'^2 \geqslant 0$.
Ainsi, y^2 est convexe, positive, et on suppose par l'absurde qu'elle s'annule en a et en b distincts.
La courbe de y^2 est en-dessous de sa corde reliant a à b donc $y^2 \leqslant 0$ et $y = 0$ sur $[a\,,b]$.
Par Cauchy-Lipschitz, $y = 0$.

C.4 $y'' + qy = 0$ avec $q \geqslant \alpha > 0$, intervalle fini ⋆⋆

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On étudie dans un premier temps les zéros de (E) sur $I = [a\,, b]$.

Proposition 12.2.17: Finitude du nombre de zéros

Toute solution non-nulle de (E) a un nombre fini de zéros.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$, 2-à-2 distincts tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, y(x_n) = 0$.
Par compacité de I, on extrait une sous-suite convergente de (x_n) : $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \in I$.
Par continuité de y, $y(z) = 0$. Mais z n'est pas un zéro isolé, puisque $z = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$, avec les termes 2-à-2 distincts. Cela contredit le principe des zéros isolés vu précédemment.

C.5 $y'' + qy = 0$ avec $q \geqslant \alpha > 0$, intervalle infini ⋆⋆

Soit $a \in \mathbb{R}$. On étudie dans un second temps les zéros de (E) sur l'intervalle $[a\,, +\infty[$.

Proposition 12.2.18

Toute solution de (E) s'annule une infinité de fois.
Plus précisément, l'ensemble des zéros d'une solution de (E) n'est pas majoré : pour $b > a$, on dispose de $x_0 \geqslant b$ tel que $y(x_0) = 0$.

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que y ne s'annule pas sur $[b\,, +\infty[$. Sans perte de généralité, supposons $y > 0$ sur cet intervalle (en effet par TVI y ne change pas de signe).
Alors, $y'' = -qy < 0$ donc y' est décroissante.
Nécessairement, $y' \geqslant 0$. En effet si'il existe $c \geqslant b$ tel que $y'(c) < 0$, alors pour $x \geqslant c$, $y(x) \leqslant y'(c)(x - c) + y(c) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ (car $y'(c) < 0$), absurde. Donc y est croissante.
Ainsi pour $x \geqslant b$, $y(x) \geqslant y(b) > 0$ donc

$$y''(x) = -q(x)y(x) \leqslant -q(x)y(b) \leqslant -\alpha y(b) = \beta < 0$$

En intégrant,

$$y'(x) = \beta(x - b) + y'(b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty, \text{ absurde.}$$

Donc y s'annule sur tout intervalle $[b\,, +\infty[$, avec b quelconque dans $[a\,, +\infty[$.

On peut donc définir par récurrence la suite $(x_n)_n$:

- $x_0 = \min(y^{-1}(\{0\}) \cap [a\,, +\infty[)$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, si x_n est bien défini, c'est un zéro isolé, on trouve $\delta_n > 0$ tel que y ne s'annule pas sur $]x_n\,, x_n + \delta_n[$
  On pose alors $x_{n+1} = \min(y^{-1}(\{0\}) \cap [x_n + \delta_n\,, +\infty[)$.

Proposition 12.2.19: (x_n) diverge

Avec la suite (x_n) définie précédemment, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration. Pour tout $b \in [a\,,+\infty[$, $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in [a\,,b]\}$ est fini donc majoré par un certain N.
Ainsi pour $n \geqslant N+1$, $x_n > b$. Donc $x_n \to +\infty$.

On a finalement

$$y^{-1}(0) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

D) Lemme de Gronwall et applications ⋆⋆⋆

Lemme 12.2.20: Lemme de Gronwall

Soient $u, p \in \mathcal{C}^0([a\,,+\infty[)$ et $C > 0$. On suppose que :

$$\forall x \geqslant a, 0 \leqslant u(x) \leqslant C + \int_a^x u(t)p(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors :

$$\forall x \geqslant a, u(x) \leqslant C\exp\left(\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Démonstration. D'après l'hypothèse pour $x \geqslant a$,

$$u(x)p(x) \leqslant Cp(x) + p(x)\int_0^x u(t)p(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi pour $x \geqslant a$,

$$\underbrace{e^{-\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}\left(u(x)p(x) - p(x)\int_0^x u(t)p(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\text{dérivée de } x\mapsto \int_a^x u(t)p(t)\,\mathrm{d}t e^{-\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t}} \leqslant \underbrace{Cp(x)e^{-\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t}}_{\text{dérivée de } x\mapsto -Ce^{-\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t}}$$

On intègre donc entre a et x :

$$\left(\int_a^x u(t)p(t)\,\mathrm{d}t\right)e^{-\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant C - Ce^{-\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t}$$

D'où

$$u(x) \leqslant C + \int_a^x p(t)u(t)\,\mathrm{d}t \leqslant Ce^{\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exemple 12.2.21: Application : caractère borné des solutions si q est croissante strictement positive

Considérons $(E) : y'' + qy = 0$ où $q \in \mathcal{C}^1([0\,,+\infty[\,,\mathbb{R}_+^*)$ croissante. Montrer que toutes les solutions de (E) sont bornées.

◅ On a $y''y' = -qyy'$. On intègre entre 0 et x :

$$\begin{aligned} y'(x)^2 - y'(0)^2 &= -2\int_0^x q(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\left[q(t)y^2(t)\right]_0^x + \int_0^x q'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} q(x)y^2(x) &= \underbrace{y'^2(0) + q(0)y^2(0)}_{=C}\underbrace{-y'^2(x)}_{\leqslant 0} + \int_0^x q'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C + \int_0^x q(t)y^2(t)\frac{q'(t)}{q(t)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

◅ Par le lemme de Gronwall, comme $\dfrac{q'}{q}$ et qy sont continues sur $[a\,,+\infty[$, on a pour $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant q(x)y^2(x) \leqslant Ce^{\int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)}\,\mathrm{d}t} = C\frac{q(x)}{q(0)}$$

Ainsi pour $x \geqslant 0, 0 \leqslant y^2(x) \leqslant \dfrac{C}{q(0)}$ et y est bornée.

E) Comportement en $+\infty$ des solutions de $X' = AX$ ⋆⋆

Soit $(E) : X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice (constante) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

E.1 Cas A symétrique

Considérons $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Notons $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres, et $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathbb{R}^n$ une base orthonormée de vecteurs propres de A associée, obtenue par théorème spectral.

Proposition 12.2.22: Solutions de (E) et comportement asymptotique

On a $\mathcal{S}_{(E)} = \mathrm{Vect}(Y_j : t \longmapsto e^{\lambda_j t}C_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$.

De plus si $j \in [\![1\,,n]\!]$, $\begin{cases} Y_j(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty & \text{si } \lambda_j > 0 \\ Y_j(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 & \text{si } \lambda_j < 0 \\ Y_j \text{ est constante} & \text{si } \lambda_j = 0 \end{cases}$

Démonstration. La description de $\mathcal{S}_{(E)}$ est au programme. Le comportement asympotique est donné par $t \mapsto e^{\lambda_j t}$, c'est donc le signe de λ_j qui influence la limite.

Corollaire 12.2.23: Précisions dans le cas $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, pour $X \in \mathcal{S}_{(E)}$, $\|X(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.
Si $A \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$, pour $X \in \mathcal{S}_{(E)}$, $\|X(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. ◁ Supposons $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{S}_{(E)}$. Ecrivons alors $X = \sum_{j=1}^{n} x_j Y_j$. Ainsi pour $t \in I$,

$$\|X(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 e^{2\lambda_j t} \geqslant \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 e^{2\lambda_1 t} \xrightarrow[t\to+\infty]{\lambda_1>0} +\infty$$

◁ Supposons $A \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{S}_{(E)}$. Ecrivons de même $X = \sum_{j=1}^{n} x_j Y_j$. Ainsi pour $t \in I$,

$$\|X(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 e^{2\lambda_j t} \leqslant \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 e^{2\lambda_n t} \xrightarrow[t\to+\infty]{\lambda_n<0} 0$$

E.2 Cas A antisymétrique

Considérons maintenant que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 12.2.24: Une solution est de norme constante

Soit $X \in \mathcal{S}_{(E)}$. Alors, $t \longmapsto \|X(t)\|$ est constante.

Démonstration. Posons $\varphi : t \longmapsto \|X(t)\|^2$. Alors, $\varphi'(t) = \langle X'(t) \mid X(t)\rangle = 2\langle AX(t) \mid X(t)\rangle = 0$. Ainsi φ est constante et $\sqrt{\varphi} = \|X\|$ aussi.

E.3 Cas A diagonalisable dans $\mathbb{C}$

Supposons A diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres, et $(C_1, \ldots, C_n)$ une base de vecteurs propres de $\mathbb{C}^n$ associée.

Proposition 12.2.25: Solutions de (E) et comportement asymptotique

On a $\mathcal{S}_{(E)} = \mathrm{Vect}(Y_j : t \longmapsto e^{\lambda_j t} C_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$.
De plus :

◁ Si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, alors toute solution X de (E) tend vers

0 en $+\infty$.

- ◅ Si pour tout $j \in [\![1\,,n]\!]$, $\mathrm{Re}(\lambda_j) \leqslant 0$, alors toute solution de (E) est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
- ◅ Si on dispose d'un $j \in [\![1\,,n]\!]$, $\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$, alors $\|Y_j(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration. Se ramener au cas réel, en passant à la partie réelle.

F) Recherche de solutions périodiques ⋆⋆

On considère f une fonction T-périodique. On cherche à résoudre

$$(E) : y'' + y = f$$

On cherche à étudier l'existence et/ou l'unicité de solutions T-périodiques à (E).
Pour cela, démontrons quelques résultats préliminaires.

Lemme 12.2.26: Résolution générale de (E)

$$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Démonstration. Très classique. Traitons ici le cas $y'' + \omega^2 y = f$.

- ◅ Equation homogène : oscillateur harmonique. $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ où $\begin{cases} y_1 : t \mapsto \cos(\omega t) \\ y_2 : t \mapsto \sin(\omega t) \end{cases}$
- ◅ Solution particulière : on utilise la méthode de variation de la constante. On cherche y_p une solution particulière sous la forme $y_p = \alpha y_1 + \beta y_2$ avec $\begin{cases} \alpha' y_1 + \beta' y_2 = 0 \\ \alpha' y_1' + \beta' y_2' = f \end{cases}$.
  Ceci s'écrit ici : pour tout $t \in I$,

$$\begin{cases} \alpha'(t)\cos(\omega t) + \beta'(t)\sin(\omega t) & = 0 \\ -\omega\alpha'(t)\sin(\omega t) + \omega\beta'(t)\cos(\omega t) & = f(t) \end{cases} \iff \begin{cases} \omega\alpha'(t) & = -\sin(\omega t)f(t) \\ \omega\beta'(t) & = \cos(\omega t)f(t) \end{cases}$$

  Soit $t_0 \in I$. Ainsi, $y_p : t \longmapsto -\dfrac{\cos(\omega t)}{\omega}\displaystyle\int_{t_0}^t \sin(\omega s)f(s)\,\mathrm{d}s + \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}\int_{t_0}^t f(s)\cos(\omega s)\,\mathrm{d}s$.
  Par formule d'addition, on conclut

$$y_p : t \longmapsto \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^t \sin(\omega(t-s))f(s)\,\mathrm{d}s$$

On en conclut finalement, dans le cas qui nous occupe ($\omega = 1$) que
$y : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 12.2.27: Solutions périodiques à $y'' + y = f$

On considère f une fonction T-périodique, et $(E) : y'' + y = f$. Alors :

- ◅ Si $T \notin 2\pi\mathbb{Z}$, (E) admet une unique solution T-périodique.
- ◅ Si $T \in 2\pi\mathbb{Z}$:
  - — Si $\displaystyle\int_0^T \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, toutes les solutions sont T-périodiques.
  - — Sinon, aucune solution n'est T-périodique.

Démonstration. Soit y une solution de (E). Posons $\tilde{y} : t \longmapsto y(t+T)$. Alors $\tilde{y}$ est encore solution de (E).

$$\begin{aligned} y \text{ est } T\text{-périodique} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, y(t+T) = y(t) \\ &\iff \tilde{y} = y \\ &\iff \begin{cases} \tilde{y}(0) &= y(0) \\ \tilde{y}'(0) &= y'(0) \end{cases} \qquad \text{par Cauchy-Lipschitz} \\ &\iff \begin{cases} y(T) &= y(0) \\ y'(T) &= y'(0) \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $y : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ donc

$$y' : x \longmapsto -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) + \int_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ est } T\text{-périodique} &\iff \begin{cases} \lambda &= \lambda\cos(T) + \mu\cos(T) + \displaystyle\int_0^T \sin(T-t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ \mu &= -\lambda\sin(T) + \mu\cos(T) + \displaystyle\int_0^T \cos(T-t)f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda(\cos(T)-1) + \mu\sin(T) &= -\displaystyle\int_0^T \sin(T-t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ -\lambda\sin(T) + \mu(\cos(T)-1) &= -\displaystyle\int_0^T \cos(T-t)f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $\begin{vmatrix} \cos(T)-1 & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T)-1 \end{vmatrix} = (\cos(T)-1)^2 + \sin^2(T) = 2(1-\cos(T))$. On distingue donc les cas.

- ◅ Si $\cos(T) \neq 1$, *id est* $T \notin 2\pi\mathbb{Z}$, (E) admet une unique solution T-périodique (car le système admet une unique solution).
- ◅ Sinon, $\cos(T) = 1$ et $\sin(T) = 0$. Alors,

  $$y \text{ est } T\text{-périodique si et seulement si } \int_0^T \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

  Cela fournit les deux cas restants.

III) Calcul différentiel et optimisation

A) Différentiabilité

A.1 Différentielles classiques ⋆⋆⋆⋆

Proposition 12.3.1: Normes

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. Montrer que $\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en 0.

Démonstration. Soit $v \in E\setminus\{0\}$. L'application $t \longmapsto f(0_E+tv) = |t|\,\|v\|$ n'est pas dérivable en 0. Ainsi f n'admet pas de dérivée selon le vecteur v. f n'est donc pas différentiable en 0.

Proposition 12.3.2: Déterminant

L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable. On a de plus pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\nabla \det(A) = \mathrm{Com}(A)$$

Démonstration. $\varphi_j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ A & \longmapsto & C_j(A) \end{array} \right.$ où $C_j(A)$ est la j-ème colonne de A est linéaire donc différentiable. Le déterminant est une forme n-linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Donc det est différentiable en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On sait que $\mathrm{d}(\det) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\right)$ et

$$\mathrm{d}(\det)(A)\cdot H = \sum_{(i,j)\in[\![1\,,n]\!]^2} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A)\cdot h_{ij}$$

Soit $(k,l) \in [\![1\,,n]\!]^2$. On veut calculer $\dfrac{\partial \det}{\partial a_{kl}}(A)$. On développe par rapport à la l-ème colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \det(A_{il}) a_{il}$$

Ainsi $\dfrac{\partial \det}{\partial a_{kl}}(A) = (-1)^{k+l} \det A_{kl} = [\mathrm{Com}(A)]_{kl}$. On en conclut que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\det)(A)\cdot H &= \sum_{i,j} [\mathrm{Com}(A)]_{i,j} h_{ij} \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(A)^\top H) = \langle \mathrm{Com}(A) \mid H \rangle \end{aligned}$$

D'où $\nabla \det = \mathrm{Com}(A)$.

Proposition 12.3.3: $A^\top A$

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^\top A \end{array} \right.$. Alors f est différentiable et

$$\mathrm{d}f(A) : H \longmapsto A^\top H + H^\top A$$

Démonstration. $f(A+H) = A^\top A + A^\top H + H^\top A + H^\top H = f(A) + \varphi(H)(A) + \|H\|\,\varepsilon(H)$ où $\varepsilon(H) \xrightarrow[\|H\|\to 0]{} 0$ et $\varphi(H)$ linéaire.

Proposition 12.3.4: A^{-1}

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array} \right.$. Alors f est différentiable et

$$\mathrm{d}f(A) : H \longmapsto -A^{-1}HA^{-1}$$

Démonstration. f est bien définie car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}\{\mathbb{R}\}_*$ est un ouvert.
$f(A+H) = (A+H)^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} = (I_n - A^{-1}H + o(H))A^{-1} = f(A) - A^{-1}HA^{-1} + o(H)$.

A.2 Coordonnées polaires ⋆⋆⋆⋆

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right. \quad \text{différentiable sur } \Omega$$

Et le changement de variables :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right. \quad \text{continu et différentiable sur } \Omega$$

Soit $W = \varphi^{-1}(\Omega)$ ouvert. Soit $g = f \circ \varphi : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Ainsi g est continue et différentiable sur W.

Théorème 12.3.5: Changement de variables polaire

On les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) & = \cos\theta & \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) & +\sin\theta & \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) & = -r\sin\theta & \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) & +r\cos\theta & \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) & = \cos\theta & \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) & -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) & = \sin\theta & \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) & +\dfrac{\cos\theta}{r} & \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{cases}$$

Démonstration. ◁ On utlise la règle de la chaîne.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\dfrac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\dfrac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{cases}$$

d'où finalement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

◁ La matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ est de déterminant r. Donc pour $r > 0$, A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$. Donc pour $r > 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{cases}$$

A.3 Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs ⋆⋆

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Lemme 12.3.6: Précisions sur la connexité par arcs dans le cas d'un ouvert

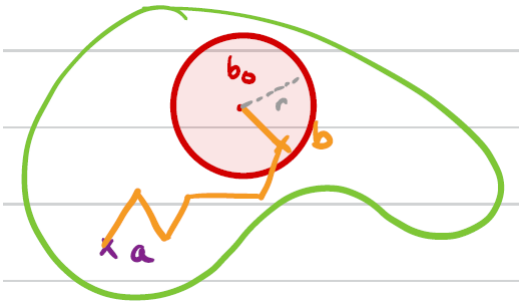
Soit Ω un ouvert connexe par arcs. Alors tous points de Ω peuvent être reliés par un chemin affine par morceaux.

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ et

$$W_a = \{b \in \Omega, a \text{ et } b \text{ peuvent être reliés par un chemin affine par morceaux}\}$$

On souhaite montrer que $W_a = \Omega$. On sait que Ω est connexe par arcs donc connexe, d'après le Théorème 6.4.6. Les seules parties ouvertes et fermées de Ω sont donc $\varnothing$ et lui-même.
On montre ainsi que W_a est non-vide, ouvert et fermé dans Ω.

- $a \in W_a$ donc $W_a \neq \varnothing$.
- Soit $b_0 \in W_a$. On dispose de γ un chemin affine par morceaux qui relie a et b_0. Comme Ω est ouvert, on dispose de $r > 0$ tel que $B(b_0, r) \subseteq \Omega$.
  Alors, pour $b \in B(b_0, r)$, $[b_0\,, b] \subseteq \Omega$. Donc b peut être relié à b_0 puis à a par un chemin affine par morceaux.



  Ainsi $B(b_0, R) \subseteq W_a$. W_a est donc un ouvert.
- De plus si $b_0 \notin W_a$, on trouve $r > 0$ tel que $B(b, r) \subseteq W$. Pour $b \in B(b_0, r)$, $[b_0\,, b] \subseteq \Omega$. Donc si $b \in W_a$, $b_0 \in W_a$ ce qui est exclu. Donc $B(b_0, r) \subseteq \Omega \backslash W_a$. Ainsi $\Omega \backslash W_a$ est ouvert donc W_a est fermé.

Par connexité, on a donc $W_a = \Omega$.

Théorème 12.3.7: Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs

Soit f différentiable sur Ω un ouvert connexe par arcs de E. Alors, f est constante sur Ω *si et seulement si*

$$\forall a \in \Omega,\ \mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

L'implication directe est toujours vraie, seule la réciproque n'est pas évidente.

Démonstration. ◅ Démonstration plus simple si Ω est convexe : Soit $(a, x) \in \Omega^2$. Alors $[a\,, x] \subseteq \Omega$ et

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \underbrace{\mathrm{d}f(a + t(x-a))}_{=0} \cdot (x - a)\,\mathrm{d}t = 0$$

donc f est constante sur Ω.

◅ Cas général : on utilise le lemme précédent. Soit $(a,x)\in\Omega^2$. Considérons γ un chemin affine sur chaque $[t_j\,,t_{j+1}]$ reliant a à x, où $0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_d=1$.
Comme par le premier cas,

$$f(\gamma(t_{j+1}))-f(\gamma(t_j))=\int_{t_j}^{t_{j+1}}\underbrace{\mathrm{d}f(\gamma(s))}_{=0}\cdot\gamma'(s)\,\mathrm{d}s=0$$

Ainsi $f(a)=f(\gamma(t_0))=f(\gamma(t_1))=\cdots=f(\gamma(t_d))=f(x)$, et f est constante.

A.4 Applications affines de jacobienne antisymétrique ⋆

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Lemme 12.3.8: Applications affines

Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ différentiable. Alors, f est une application affine *si et seulement si* sa différentielle est constante.

Démonstration. ◅ $\Rightarrow$: Supposons que pour $x\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=\varphi(x)+b$ où $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $b\in\mathbb{R}^n$. Alors pour $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)=\varphi$. Ainsi l'application $x\mapsto\mathrm{d}f(x)$ est constante.
◅ $\Leftarrow$: Supposons que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)=\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Posons $b=f(0)$. Alors,

$$f(x)-f(0)=\int_0^1\mathrm{d}f(tx)\cdot x\,\mathrm{d}t=\int_0^1\varphi(x)\,\mathrm{d}t=\varphi(x)$$

Ainsi $f:x\longmapsto\varphi(x)+b$.

Lemme 12.3.9: Un lemme sur les permutations

Soit X un ensemble quelconque et $\phi:X^3\longrightarrow\mathbb{R}$ vérifie

$$\forall(x,y,z)\in X^3,\phi(x,y,z)=\phi(y,x,z)=-\phi(z,y,x)$$

alors $\phi=0$.

Démonstration. Soient $x_1,x_2,x_3\in X$. Soit $\sigma=(1\ 2\ 3)\in\mathfrak{S}_3$.
Alors on a $\phi(x_1,x_2,x_3)=\phi(x_{\sigma^3(1)},x_{\sigma^3(2)},x_{\sigma^3(3)})=(-1)^3\phi(x_1,x_2,x_3)$. Ainsi, $\phi(x_1,x_2,x_3)=0$ et ϕ est nulle.

On rappelle que pour $f\in\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ (Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$) différentiable en $a\in\Omega$, on définit la matrice jacobienne de f en a :

$$\mathcal{J}(f)(a)=\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n}\left(\mathrm{d}f(a)\right)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j\in[\![1\,,n]\!]\times[\![1\,,p]\!]}$$

Théorème 12.3.10: Applications de jacobienne antisymétrique

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $f : x \longmapsto Ax + b$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \mathcal{J}(f)(x) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. $\lhd$ $\underline{(2) \Rightarrow (1)}$: Par antisymétrie de la jacobienne en tout point,

$$\forall (i,j,k) \in [\![1\,,n]\!]^3\,, \forall x \in \mathbb{R}^n, \frac{\partial f_i}{\partial x_k \partial x_j}(x) = -\frac{\partial f_j}{\partial x_k \partial x_i}(x) (\star)$$

On pose $\phi : \begin{cases} [\![1\,,n]\!]^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (j,k,i) & \longmapsto & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k \partial x_j}(x) \end{cases}$. Alors :

$$\begin{cases} \phi(k,j,i) = \phi(j,k,i) \text{ par théorème de Schwarz} \\ \phi(k,j,i) = -\phi(k,i,j) \text{ par } (\star) \end{cases}$$

Ainsi par le Lemme 12.3.9, $\phi = 0$. Donc pour tous $(i,j,k) \in [\![1\,,n]\!]^3$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k \partial x_j} = 0$ sur $\mathbb{R}^n$.
Donc pour tous (i,j), $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$ constante. Ainsi, $x \longmapsto \mathcal{J}(f)(x) = (a_{ij})_{i,j \in [\![1\,,n]\!]} = A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Enfin, par le Lemme 12.3.8, la différentielle de f est constante donc f est affine, et on a la forme voulue.

$\lhd$ $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: Si $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f)(x) &= \left(\frac{\partial \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + b_i \right)}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j \in [\![1\,,n]\!]^2} \\ &= (a_{ij})_{i,j \in [\![1\,,n]\!]^2} \\ &= A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

B) Espaces tangents ⋆⋆⋆

On considère dans cette sous-partie E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

B.1 Définition

Définition 12.3.11: Vecteur et espace tangent

Soit Σ une partie de E, et $a \in \Sigma$.
Alors on dit que $v \in E$ est tangent à Σ en a s'il existe $\varepsilon > 0$, $\gamma \in \mathcal{D}^1\left(]-\varepsilon\,,\varepsilon[\,, E\right)$,

tel que :

$$\begin{cases} \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \gamma(t) \in \Sigma \\ \gamma(0) = a \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$$

On définit l'espace tangent à Σ au point a, noté $\mathcal{T}_a\Sigma$, comme l'ensemble des vecteurs tangents à Σ en a.

Attention néanmoins, en général l'espace tangent à une partie n'est pas un espace vectoriel. Remarquons que dans la majorité des cas, $\mathcal{T}_a\Sigma$ sera un espace vectoriel, mais il ne faut pas tirer de généralité.
En réalité, $\mathcal{T}_a\Sigma$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ lorsque Σ est une sous-variété $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ (largement hors-programme).

B.2 Exemples

Proposition 12.3.12: Espace tangent à une sphère

Soit $a \in \mathbb{S}(0,R) \subseteq E$, $R > 0$. Alors $\mathcal{T}_a\mathbb{S}(0,R) = \text{Vect}\,(a)^\perp$.

Démonstration. Par double inclusion. Notons $\Sigma = \mathbb{S}(0,R)$.

- $\lhd \Rightarrow$: Soit $v \in \mathcal{T}_a\Sigma$. On a $v = \gamma'(0)$ où $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[, \gamma(t) \in \mathbb{S}(0,R)$, $\gamma(0) = a$. Ainsi,

$$\|\gamma(t)\|^2 = R^2$$

  En dérivant pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $2\langle\gamma'(t) \mid \gamma(t)\rangle = 0$ soit en $t = 0$, $v \in a^\perp$.

- $\lhd \Leftarrow$: Soit $v \in \text{Vect}\,(a)^\perp$. Si $v = 0$, le chemin constant égal à a convient. Sinon, posons $u = R\dfrac{v}{\|v\|}$ de norme R. On pose :

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \cos\left(\dfrac{\|v\|}{R}t\right)a + \sin\left(\dfrac{\|v\|}{R}t\right)u \end{cases}$$

  De la sorte, pour tout t, $\|\gamma(t)\|^2 = R^2$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \dfrac{\|v\|}{R}u = v$.

Proposition 12.3.13: Espace tangent en I_n de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$\mathcal{T}_{I_n}\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Démonstration. $\lhd \Leftarrow$: Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Considérons le chemin $\gamma : t \mapsto e^{tA}$. Alors :

- $\gamma(0) = I_n$
- $\gamma'(0) = A$

— $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

◁ $\Rightarrow$: Soit $A \in \mathcal{T}_{I_n}\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors on considère $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$.
Ainsi pour $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t)^\top \gamma(t) = I_n$. La dérivation de cette égalité donne : $\gamma'(t)^\top \gamma(t) + \gamma(t)^\top \gamma'(t) = 0$. Puis finalement en évaluant en 0 on obtient $A^\top + A = 0$.

Proposition 12.3.14: Espace tangent en I_n de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

$\mathcal{T}_{I_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \mathrm{Tr}$

Démonstration. ◁ $\Leftarrow$: Soit A de trace nulle. Considérons le chemin $\gamma : t \mapsto e^{tA}$. Alors :

— $\gamma(0) = I_n$

— $\gamma'(0) = A$

— $\forall t \in \mathbb{R}, \det \gamma(t) = e^{\mathrm{Tr}\, A} = e^0 = 1$

◁ $\Rightarrow$: Soit $A \in \mathcal{T}_{I_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Alors on considère $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$.
Ainsi pour $t \in \mathbb{R}$, $\det \gamma(t) = 1$. La dérivation de cette égalité donne, d'après la différentielle du det : $\mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(\gamma(t))^\top \gamma'(t)) = 0$. Puis finalement en évaluant en 0 on obtient $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Proposition 12.3.15: Graphe d'une fonction de I dans $\mathbb{R}$

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Notons Γ le graphe de f et $\mathcal{D}$ la droite tangente à f en x_0. Alors :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + \mathcal{T}_{(x_0, f(x_0))}\Gamma$$

Démonstration. ◁ Soit $v \in \mathcal{T}_{(x_0,f(x_0))}\Gamma$. Alors $v = \gamma'(0)$ avec $\gamma(0) = (x_0, f(x_0))$ et $\gamma : \begin{cases}]-\varepsilon, \varepsilon[& \longrightarrow & \Gamma \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t) = f(x(t))) \end{cases}$.
D'où

$$v = \gamma'(0) = (x'(0), x'(0)f'(x(0))) = x'(0)\left(1, f'(x(0))\right)$$

Ainsi, $\mathcal{T}_{(x_0,f(x_0))}\Gamma \subseteq \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}\right)$.

◁ En prenant $\gamma : t \longmapsto \underbrace{(x_0 + t\alpha, f(x_0 + t\alpha))}_{\in \Gamma}$, on a

$$\gamma'(0) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_{(x_0,f(x_0))}\Gamma$$

Ainsi, on a égalité.

B.3 Lignes de niveau

Théorème 12.3.16: Espace tangent à une ligne de niveau

Soit $\Omega \subseteq E$, et $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.
Soit $\Sigma = g^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in E, g(x) = \alpha\}$.
Soit $a \in \Omega$ tel que $\mathrm{d}g(a) \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$.
Alors, $\mathcal{T}_a\Sigma = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}g(a))$ est un hyperplan.

Démonstration. Hors-programme, car nécessite un résultat difficile : le théorème des fonctions implicites.

Remarquons que dans $\mathbb{R}^n$, on peut donner l'équation de cet hyperplan. En notant $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ les coordonnées de $\gamma(t)$ dans la base canonique, on a pour tout t :

$$\begin{aligned}\gamma(t) \in g^{-1}\{\alpha\} &\iff g(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = \alpha \\ &\implies \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))\gamma_k'(t) = 0 \text{ par règle de la chaîne}\end{aligned}$$

Finalement (en évaluant en $t = 0$) l'équation de l'hyperplan tangent est :

$$\left(\mathcal{T}_a g^{-1}\{\alpha\}\right) \ : \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}(a) v_k = 0$$

Corollaire 12.3.17: Cas euclidien

Soit $\Omega \subseteq E$ euclidien, et $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.
Soit $\Sigma = g^{-1}(\{\alpha\})$, et $a \in \Omega$ tel que $\nabla g(a) \neq 0_E$.
Alors, $\mathcal{T}_a\Sigma = (\nabla g(a))^{\perp}$.

Démonstration. Provient du fait que $\mathrm{d}g(a) : h \longmapsto \langle \nabla g(a) \mid h \rangle$.

On retrouve par exemple un démonstrations plus simple du fait que $\mathcal{T}_{I_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$. En effet, $\mathrm{d}(\det)(I_n) : H \longmapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}^{\top}(I_n)H) = \mathrm{Tr}(H) \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*}$ donc

$$\mathcal{T}_{I_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$$

On peut également trouver l'espace tangent à un graphe en 2D (déjà vu), ou en 3D :

Exercice 13

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Notons $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \Omega, z = f(x, y)\}$ le graphe de f.
Montrer que pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{T}_{(x_0,y_0)}\Gamma_f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}\right)$$

On pourra poser $g : (x, y, z) \mapsto z - f(x, y)$.

C) Équations aux dérivées partielles

C.1 EDP classiques ⋆⋆⋆⋆

Proposition 12.3.18

Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, considérons

$$(E) : y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Les solutions sont

$$\left\{(x, y) \longmapsto g(\sqrt{x^2 + y^2}), g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})\right\}$$

Démonstration. On fait un changement de variables polaire. Posons :

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{\Omega} = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi\,,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right.$$

Alors,

$$\begin{aligned}(E) &\iff \forall (r,\theta) \in \tilde{\Omega}, r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\sin\theta, r\cos\theta) - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 \\ &\iff \forall (r,\theta) \in \tilde{\Omega}, -r\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = 0 \\ &\iff \forall (r,\theta) \in \tilde{\Omega}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{f}(r, \theta) = g(r)$, *id est* $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Proposition 12.3.19

Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérons

$$(E) : x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Les solutions sont

$$\left\{(x, y) \longmapsto g\left(\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right), g \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)\right\}$$

Démonstration. On fait également un changement de variables polaire. Posons :

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{\Omega} = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right.$$

Alors,

$$(E) \iff \forall (r,\theta) \in \tilde{\Omega}, r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\sin\theta, r\cos\theta) + r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$
$$\iff \forall (r,\theta) \in \tilde{\Omega}, r\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

Ainsi, $\tilde{f}(r,\theta) = g(\theta)$, *id est* comme $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x,y) = g\left(\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

Théorème 12.3.20: Equation de d'Alembert

Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, considérons

$$(\mathcal{A}) : \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Les solutions sont

$$\left\{(x,t) \longmapsto H(x-ct) + H(x+ct), H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right\}$$

Démonstration. Vue en cours de physique des ondes.

C.2 Calcul du laplacien en polaires ⋆⋆⋆

Proposition 12.3.21: Laplacien en polaire

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$.
Alors :

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

Démonstration. Notons

$$g : (r,\theta) \longmapsto \cos\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) \text{ et } h : (r,\theta) \longmapsto \sin\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$$

Alors d'après les expressions obtenues au Théorème 12.3.5,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} \\ &= \cos\theta \left(\cos\theta \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r \partial \theta}\right) \\ &\quad - \frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \theta} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}\right)\end{aligned}$$

On applique le même principe pour obtenir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Ensuite,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

C.3 Applications α-homogènes ⋆⋆

Théorème 12.3.22: Définition des applications α-homogènes

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall \mu > 0, f(\mu a) = \mu^\alpha f(a)$
2. $\forall a \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}f(a) \cdot a = \alpha f(a)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x)$

Une telle application est dite α-homogène.

Démonstration. ◅ (2) $\iff$ (3) : par définition de $\mathrm{d}f(a) \cdot a$.

◅ (1) $\Rightarrow$ (3) : On suppose que $\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall \mu > 0, f(\mu a) = \mu^\alpha f(a)$. En dérivant par rapport à $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R}^n, \alpha\mu^{\alpha-1} f(a) &= \frac{\partial (f \circ \mu\mathrm{id})}{\partial \mu}(a) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mu a)\frac{\partial (\mu\mathrm{id})_i}{\partial \mu}(a) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mu a)\end{aligned}$$

Avec $\mu = 1$, on obtient : $\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) x_i = \alpha f(a)$.

◅ (2) $\Rightarrow$ (1) : Soit $\gamma : t \longmapsto f(ta)$. γ est dérivable car f est différentiable. Ainsi,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \mathrm{d}f(ta) \cdot a \\ &= \frac{1}{t}(\mathrm{d}f(ta) \cdot ta) = \frac{1}{t}\alpha f(ta) \\ \gamma'(t) &= \frac{\alpha}{t}\gamma(t)\end{aligned}$$

Ainsi, si $\varphi : t \longmapsto \gamma(t)e^{-\alpha \ln(t)}$, $\varphi'(t) = 0$. Donc $\gamma : t \longmapsto Ct^\alpha, C \in \mathbb{R}$.
En évaluant en $t = 1$, $\gamma(1) = f(a) = C$ donc $f(ta) = f(a)t^\alpha$.

Exemple 12.3.23: Application

Résoudre, pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, l'équation

$$(E) : x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^3 + y^3}$$

◁ On remarque que $f_p : (x, y) \longmapsto \frac{2}{3}\sqrt{x^3 + y^3}$ est $\frac{3}{2}$-homogène. En effet,

$$f_p(t(x, y)) = \frac{2}{3}\sqrt{t^3x^3 + t^3y^3} = t^{\frac{3}{2}} f_p(x, y)$$

◁ Donc f_p vérifie d'après la proposition précédente

$$\mathrm{d}f(x) \cdot x = \frac{3}{2} f(x) = \sqrt{x^3 + y^3}$$

c'est-à-dire que f_p est solution particulière de (E).

◁ Ainsi, f est solution de (E) si $f - f_p$ est solution de $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. D'après la Proposition 12.3.19, $f - f_p$ ne dépend que de $\theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$.
Ceci s'écrit avec les notations précédentes : $\tilde{f}(r, \theta) - \tilde{f}_p(r, \theta) = g(\theta)$.
Or, f et f_p sont continues en $(x = 0, y = 0)$ c'est à dire que $r \mapsto \tilde{f}(r, \theta)$ et $r \mapsto \tilde{f}_p(r, \theta)$ sont continues en 0 à θ fixé. Donc :

$$g(\theta) = \lim_{r \to 0} \left(\tilde{f}(r, \theta) - \tilde{f}_p(r, \theta)\right) = \tilde{f}(0, \theta) - \tilde{f}_p(0, \theta) = f(0, 0) - f_p(0, 0) = f(0, 0)$$

Ainsi g est constante.

◁ Donc $f - f_p = C \in \mathbb{R}$. On vérifie que toutes ces fonctions sont solutions et on conclut que l'ensemble des solutions est :

$$\left\{(x, y) \longmapsto C + \frac{2}{3}\sqrt{x^3 + y^3}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

D) Optimisation

D.1 Exemples très classiques ⋆⋆⋆⋆

Proposition 12.3.24: Exemple introductif

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x = \frac{1}{2}\langle x \mid Ax\rangle - \langle b \mid x\rangle \end{cases}$.
Alors f atteint un minimum global en $A^{-1}b$.

Démonstration. Calculons en premier lieu $\mathrm{d}f$.

Pour $x, h \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}f(x) \cdot h = \frac{1}{2}\langle x \mid Ah\rangle + \frac{1}{2}\langle h \mid Ax\rangle - \langle b \mid h\rangle = \langle Ax - b \mid h\rangle$$

Ainsi, $\nabla f(x) = Ax - b$.
Donc, si f a un extrémum en $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(a) = 0$ *si et seulement si* $a = A^{-1}b$. Prouvons maintenant que cet extrémum existe.
On remarque pour cela que $\|f(x)\| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. En effet,

$$\|f(x)\| \geqslant \frac{\lambda_1}{2}\|x\|^2 - \|b\|\,\|x\| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Ainsi, on trouve $R > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| > R$, $f(x) \geqslant f(0) + 1$. Ainsi, $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \min\limits_{x\in\overline{B}(0,R)} f(x)$ qui est atteint (car f est continue sur la boule fermée de rayon R compacte).

Théorème 12.3.25: Théorème spectral

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable en base orthonormée.

Démonstration. Il suffit de trouver un vecteur propre de norme 1 de A. En effet si x_0 est un tel vecteur, on construit une base orthonormée de vecteurs propres de A par récurrence, en induisant sur $(\mathbb{R}x_0)^\perp$.
Considérons pour cela l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle Ax \mid x\rangle \end{array}\right.$.

- ◅ On montre tout d'abord que f admet un extrémum sur la sphère unité $\mathbb{S}(0,1)$.
  f atteint son maximum en $x_0 \in \mathbb{S}(0,1)$, car f est continue sur la sphère unité, qui est comapcte.
- ◅ De plus, pour $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\mathrm{d}f(x)\cdot h = \langle x \mid Ah\rangle + \langle h \mid Ax\rangle = \langle 2Ax \mid h\rangle$. Ainsi $\nabla f(x) = 2Ax$.
  Donc, appliquons le théorème des extrémas liés :
  - On remarque que $\mathbb{S}(0,1) = g^{-1}\{1\}$ si $g : x \mapsto \langle x \mid x\rangle = \|x\|^2$.
  - Alors, $f_{|g^{-1}\{1\}}$ admet un extrémum en x_0.

  On trouve donc $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0) = 2\lambda x_0$. Ainsi $Ax_0 = \lambda x_0$, et $x_0 \in \mathbb{S}(0,1)$ est vecteur propre de A.

D.2 Cas particulier où $\|f(x)\| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ⋆⋆⋆

Nous avons déjà rencontré ce cas lorsque nous avons traité

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x = \dfrac{1}{2}\langle x \mid Ax\rangle - \langle b \mid x\rangle \end{array}\right.$$

Lemme 12.3.26: Le minimum global de f est atteint

Si $\|f(x)\| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, le minimum global de f est atteint.

Démonstration. Soit $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \geqslant A$, $f(x) \geqslant f(0) + 1$.
Ainsi $\min_{\mathbb{R}^n} f = \min_{\overline{B}(0,R)} f$ qui est atteint.
Donc f atteint son minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 12.3.27: Fonction $\mathcal{C}^1$ où $\mathrm{d}f(x)$ est inversible

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}f(x) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$
- $\|f(x)\| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Alors f est surjective.

Démonstration. Très classique. Soit $b \in \mathbb{R}^n$, on veut montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$, $f(a) = b$.

- Posons pour cela $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f(x) - b\|^2 \end{array} \right.$, et on montre que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
  Soit $A > 0$. On dispose de $R > 0$ tel que pour $\|x\| \geqslant R$, $\|f(x)\| \geqslant \sqrt{A} + \|b\|$.
  Ainsi $\|f(x)\| - b \overset{\text{IT}}{\geqslant} |\|f(x)\| - \|b\|| \geqslant \sqrt{A}$ et donc $g(x) \geqslant A$.

- On en déduit par le lemme que g atteint son minimum global en $a \in \mathbb{R}^n$. On montre que $g(a) = 0$, c'est-à-dire que $f(a) = b$.
  On a $\mathrm{d}g(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$. Or, $\mathrm{d}g(a) : h \longmapsto 2\langle \mathrm{d}f(a) \cdot h \mid f(a) - b\rangle$. On en déduit que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \langle \underbrace{\mathrm{d}f(a)}_{\in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)} \cdot h \mid f(a) - b\rangle = 0$$

  Ainsi pour tout $k \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle k \mid f(a) - b\rangle = 0 \text{ d'où } f(a) = b$$

E) Fonctions convexes

E.1 Définition ⋆⋆

Définition 12.3.28: Fonction convexe

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que f est convexe si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0\,,1]\,, f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y)$$

On considère dans la suite Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Lemme 12.3.29: Une équivalence bien pratique

Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. f est convexe *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \Omega^2, \varphi_{x,y} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f((1-t)x+ty) \end{array} \right. \text{ est convexe}$$

Démonstration. $\lhd \Leftarrow$: On applique ceci avec $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$, $s \in [0\,,1]$. Alors

$$\varphi_{x,y}((1-s)t_1 + t_2 s) \leqslant (1-s)\varphi_{x,y}(t_1) + s\varphi_{x,y}(t_2)$$

ce qui fournit $f((1-s)x+sy) \leqslant (1-s)f(x)+sf(y)$.

$\lhd \Rightarrow$: On suppose f convexe. Soient $(t_1,t_2) \in [0\,,1]^2$. Soit $s \in [0\,,1]$. Posons : $\tau = (1-s)t_1 + st_2$. Alors :

$$\varphi_{x,y}(\tau) = f((1-\tau)x+\tau y) = f((1-s)x_1+sx_2) \text{ où } \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = (1-t_1)x+t_1 y \\ x_2 & = (1-t_2)x+t_2 y \end{array} \right.$$

Ainsi $\varphi_{x,y}(\tau) \leqslant (1-s)f(x_1)+sf(x_2) \leqslant (1-s)\varphi_{x,y}(t_1)+s\varphi_{x,y}(t_2)$.

E.2 Fonctions convexes différentiables ⋆⋆

Théorème 12.3.30: Caractérisation de la convexité avec le gradient

Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ différentiable. Alors, f est convexe *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \Omega^2, f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x) \mid y-x \rangle$$

Démonstration. $\lhd \Rightarrow$: On utilise la fonction $\varphi_{x,y}$ définie précédemment.
Comme f est convexe, pour $x,y \in \mathbb{R}$, $\varphi = \varphi_{x,y}$ est convexe. Ainsi : $\varphi(1) \geqslant \varphi(0) + \varphi'(0)(1-0)$.
Or f est différentiable donc φ est dérivable. Pour $t \in [0\,,1]$, $\varphi'(t) = \mathrm{d}f(x+t(y-x)) \cdot (y-x) = \langle \nabla f(x+t(y-x)) \mid y-x \rangle$.
D'où $f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x) \mid y-x \rangle$.

$\lhd \Leftarrow$: Soient $(x,y) \in \Omega^2$. Posons pour $t \in [0\,,1]$, $z = (1-t)x + ty$. D'après l'hypothèse,

$$\begin{cases} f(x) & \geqslant f(z) + \langle \nabla f(z) \mid x - z \rangle \\ f(y) & \geqslant f(z) + \langle \nabla f(z) \mid y - z \rangle \end{cases}$$

Par combinaison linéaire, $(1-t)f(x) + tf(y) \geqslant f(z) + \langle \nabla f(z) \mid \underbrace{(1-t)(x-z) + t(y-z)}_{=0} \rangle$.

Ainsi, $(1-t)f(x) + tf(y) \geqslant f(z)$. Donc f est convexe.

Proposition 12.3.31: Tout extrémum local est un minimum global

Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ convexe différentiable. Si f a un extrémum local en $a \in \Omega$, alors c'est un minimum global.

Démonstration. On a $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par le théorème précédent, $\forall x \in \Omega, f(x) \geqslant f(a) + 0$.

Proposition 12.3.32: Croissance du gradient

Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ différentiable. Alors f est convexe sur Ω *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \Omega^2, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x) \mid y - x \rangle \geqslant 0$$

Démonstration. $\lhd \Rightarrow$: On propose deux démonstrations.

— D'après le Théorème 12.3.30, $f(x) \geqslant f(y) + \langle \nabla f(y) \mid x - y \rangle$ et $f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(y) \mid y - x \rangle$. En sommant, il vient :

$$0 \geqslant \langle \nabla f(x) \mid y - x \rangle + \langle \nabla f(y) \mid x - y \rangle$$

d'où le résultat.

— $\varphi_{x,y}$ est convexe et dérivable donc φ' est croissante. Or

$$\varphi' \ : \ t \longmapsto \langle \nabla f((1-t)x + ty) \mid y - x \rangle$$

Ainsi, $\varphi'(1) - \varphi'(0) \geqslant 0$.

$\lhd \Leftarrow$: On montre que pour tous $(x,y) \in \Omega^2$, $\varphi_{x,y}$ est convexe sur $[0\,,1]$.
Pour cela, on montre que $\varphi'_{x,y}$ est croissante sur l'intervalle. On a : $\varphi'_{x,y} \ : \ t \longmapsto \langle \nabla f((1-t)x + ty) \mid y - x \rangle$.
Soit $(s,t) \in [0\,,1]^2$, $s < t$. Alors,

$$\varphi'(t) - \varphi'(s) = \langle \nabla f(\underbrace{(1-t)x + ty}_{=\tilde{y}}) - \nabla f(\underbrace{(1-s)x + sy}_{=\tilde{x}}) \mid y - x \rangle$$

Or, $\tilde{y} - \tilde{x} = (t-s)(y-x)$. D'où,

$$\varphi'(t) - \varphi'(s) = \langle \nabla f(\tilde{y}) - \nabla f(\tilde{x}) \mid \tilde{y} - \tilde{x} \rangle \frac{1}{t-s} \geqslant 0$$

E.3 Fonctions convexes $\mathcal{C}^2$ ⋆

On considère désormais $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Lemme 12.3.33: Développement limité à l'ordre 2

$\forall (x,y) \in \Omega^2, f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x) \mid y - x \rangle + \int_0^1 (1-t)(y-x)^\top H(f)\left((1-t)x+ty\right)(y-x)\,\mathrm{d}t$

Démonstration. Posons pour (x,y) fixés, $\varphi = \varphi_{x,y}$. On a :

$$\varphi'_{x,y} : t \longmapsto \langle \nabla f((1-t)x+ty) \mid y-x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}((1-t)x+ty)\cdot(y_j-x_j) = \mathrm{d}f((1-t)x+ty)\cdot(y-x)$$

On redérive par rapport à t :

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left((1-t)x+ty\right)(y_i-x_i)(y_j-x_j)\\ &= (y-x)^\top H(f)\left((1-t)x+ty\right)(y-x)\end{aligned}$$

Comme φ est $\mathcal{C}^2$, par formule de Taylor reste intégral,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(1) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où le résultat.

Théorème 12.3.34: Caractérisation de la convexité avec la hessienne

f est convexe *si et seulement si* $\forall x \in \Omega, H(f)(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. $\lhd \Leftarrow$: Supposons que $\forall x \in \Omega, H(f)(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Soient $(x,y) \in \Omega^2$. Alors pour $t \in [0\,,1]$,

$$(y-x)^\top H(f)((1-t)x+ty)(y-x) \geqslant 0$$

et $f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x) \mid y-x \rangle$ d'où la convexité.

$\lhd \Rightarrow$: Supposons f convexe. Soit $x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq \Omega$. On veut montrer que $h^\top H(f)(h)h \geqslant 0$.
Par l'absurde, si $h^\top H(f)(h)h < 0$, pour $|t| \leqslant \delta$ tel que $\delta \|h\| < r$, $h^\top H(f)(x+th)h < 0$.
Soit $y = x + \delta h$. Alors :

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x) \mid y-x \rangle + \delta^2 \int_0^1 (1-t)\underbrace{h^\top H(f)(x+t\delta h)}_{<0} h\,\mathrm{d}t$$

d'où $f(y) < f(x) - \langle \nabla f(y) \mid y-x \rangle$, c'est absurde.

F) Extrémas et laplacien ⋆⋆

F.1 Signe du laplacien en un extrémum local

On considère dans cette sous-partie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Proposition 12.3.35: Signe du laplacien en un extrémum local

Si f admet un minimum local en $a \in \Omega$, $\Delta f(a) \geqslant 0$.
Si f admet un maximum local en $a \in \Omega$, $\Delta f(a) \leqslant 0$.

Démonstration. $H(f)(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Or $\forall j \in [\![1\,,n]\!]$, en notant e_j le j-ème vecteur de la base canonique, $\dfrac{\partial^2 f}{\delta x_j^2}(a) = e_j^\top H(f)(a) e_j \geqslant 0$ d'où

$$\Delta f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a) = \mathrm{Tr}(H(f)(a)) \geqslant 0$$

On fait de même pour le maximum.

F.2 Principe du maximum et fonctions harmoniques

Proposition 12.3.36: Principe du maximum si $\Delta f > 0$

oit $f \in \mathcal{C}^0(\overline{B}(0,R), \mathbb{R})$ telle que $f \in \mathcal{C}^2(B(0,R), \mathbb{R})$.
On suppose $\Delta f > 0$ sur $B(0,R)$.
Alors f atteint son maximum sur $\mathbb{S}(0,R)$.

Démonstration. Comme f est continue sur un compact, elle atteint son maximum en $a \in \overline{B}(0,R)$.
Par l'absurde si $a \in B(0,R)$, par ce qui préc-de, $\Delta f(a) \leqslant 0$, absurde. Donc $a \in \mathbb{S}(0,R)$.

Définition 12.3.37: Fonction harmonique

Une fonction f $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω est dite harmonique si $\Delta f = 0$.

Proposition 12.3.38: Principe du maximum pour les fonctions harmoniques

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\overline{B}(0,R), \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^2(B(0,R), \mathbb{R})$ harmonique sur $B(0,R)$. Alors :

$$\max_{x \in \overline{B}(0,R)} f(x) = \max_{x \in \mathbb{S}(0,R)} f(x)$$

Démonstration. Idée de preuve très classique.
On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : x \longmapsto f(x) + \dfrac{1}{k}\|x\|^2$.
On pose $g : x \longmapsto \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$, ainsi $\nabla g(x) = 2x$.
Ainsi, pour $x \in B(0,R)$,

$$\Delta(f_k)(x) = \Delta f(x) + \frac{1}{k}\Delta g(x) = \frac{2n}{k} > 0$$

Par ce qui précède, on dispose de $x_k \in \mathbb{S}(0,R)$, $f_k(x_k) = \max_{\overline{B}(0,R)} f_k$. Comme $\mathbb{S}(0,R)$ est compacte, on dispose de θ une extractice telle que

$$x_{\theta(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} y \in \mathbb{S}(0,R)$$

Alors

$$f_{\theta(k)}(x_{\theta(k)}) = f(x_{\theta(k)}) + \frac{1}{\theta(k)}\left\|x_{\theta(k)}\right\|^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(y)$$

Ainsi $f(y) = \lim_{k\to+\infty} f_{\theta(k)}(x_{\theta(k)})$. Donc, pour tout $x \in \overline{B}(0,R)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = f_{\theta(k)}(x) - \frac{\|x\|^2}{\theta(k)} \leqslant \underbrace{f_{\theta(k)}(x_{\theta(k)})}_{\to f(y)} - \underbrace{\frac{R^2}{\theta(k)}}_{\to 0}$$

Donc en passant à la limite,

$$f(x) \leqslant f(y)$$

F.3 Expression polaire pour une fonction harmonique $\mathbb{R}^2$

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Proposition 12.3.39: Expression intégrale

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, telle que $\Delta f = 0$ sur Ω.
Soit $(a,b) \in \Omega^2$ et $R > 0$ tels que $B((a,b), R) \subseteq \Omega$.
Alors, pour $r \in [0\,, R[$,

$$f(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Un rapprochement peut être fait avec la formule de Cauchy (vue au Théorème 9.3.2), qui était valable pour une fonction développable en série entière. Les notons de fonction harmoniques, développables en série entière sont étroitement reliées, par le concept d'holomorphie (dérivabilité sur $\mathbb{C}$).
On peut en fait montrer que la formule de Cauchy est une conséquence directe de cette Proposition.

Démonstration. On prend $f : (x,y) \longmapsto f(a+x,b+y)$, pour se ramener au cas où $(a,b)=(0,0)$. On pose

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,,R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{array} \right.$$

On souhaite montrer que φ est constante. Posons $\tilde{f} : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Ainsi pour $r \in [0\,,R[$,

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

◅ $\underline{\varphi \in \mathcal{C}^0([0\,,R])}$: théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- A θ fixé, $r \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est continue sur $[0\,,R[$.
- A r fixé,$\theta \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est continue par morceaux sur $[0\,,2\pi]$.
- Pour tous (r,θ), $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leqslant \|f\|_{\infty,\overline{B}(0,R)} = \psi_1(\theta)$ intégrable sur $[0\,,2\pi]$.

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\varphi \in \mathcal{C}^0([0\,,R])$.

◅ $\underline{\varphi \in \mathcal{C}^2(]0\,,R[)}$: théorème $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètres.
- A θ fixé,$r \mapsto \tilde{f}(r,\theta)$ est $\mathcal{C}^2$.
- A r fixé, les applications $\theta \mapsto \tilde{f}(r,\theta)$, $\theta \mapsto \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$ et $\theta \mapsto \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$ sont continues donc intégrables sur $[0\,,2\pi]$.
- Pour tout $r \in [\varepsilon\,,R[$ $(\varepsilon > 0)$, pour tout $\theta \in [0\,,2\pi]$,

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta) \right\| \leqslant \left\| \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r,\theta) \right\|_{\infty,[\varepsilon\,,R]\times[0\,,2\pi]} = \psi_2(\theta)$$

avec ψ_2 intégrable sur $[0\,,2\pi]$

Par le théorème $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètres, $\varphi \in \mathcal{C}^2(]0\,,R[)$.

◅ $\underline{\text{EDL vérifiée par } \varphi}$: Toujours d'après le théorème $\mathcal{C}^2$, pour $r \in]0\,,R[$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi'(r) & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ \varphi''(r) & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{array} \right.$$

Or, $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$ soit $\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0$. Ainsi,

$$\varphi''(r) + \frac{1}{r}\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$$

car $\theta \longmapsto \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$ est 2π-périodique, comme dérivée d'une fonction 2π-périodique. Ainsi :

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' = 0$$

La résolution de l'équation différentielle amène que $\varphi' : \left\{ \begin{array}{ccc}]0\,,R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \dfrac{\lambda}{r} \end{array} \right.$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour $r \in]0\,,R[$, $\varphi(r) = \lambda\ln(r) + \mu$.
Par continuité de φ sur $[0\,,R[$, $\lambda = 0$. Finalement, $\varphi = \mu = \varphi(0) = f(0,0)$, ce qui fournit le résultat souhaité.