X FUI-FF 2 2025 – Mathématiques

Corrigé de : Luigi TINTINAGLIA. Ce corrigé peut contenir des erreurs.

Contact : luigi.tintinaglia@polytechnique.edu

Problème 1

1) a) Posons $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{cases}$.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par continuité de l'exponentielle.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $t \mapsto f(x,t)$ est bien continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $a > 0$, et $K = [a, +\infty[$. Soit $x \in K$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Alors,

$$|f(x,t)| \leqslant \frac{e^{-at}}{1+t^2} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$:

→ **en 0** : $\varphi_a(t) \xrightarrow[t \to 0_+]{} \dfrac{1}{1+0} = 1$. Ainsi φ_a est prolongeable par continuité en 0 ; donc intégrable au voisinage de 0.

→ **en $+\infty$** :
$$\varphi_a(t) = \frac{e^{-at}}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ car } e^{-at} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (par Riemann) donc par théorème de comparaison, φ_a est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Finalement φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

- $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+}$;
- $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

1)b) ▸ $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après 1a.

▸ $\underline{f \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)}$:

→ Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Notons à ce titre que pour $x>0$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t}{1+t^2}e^{-xt} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-xt} \end{cases}$

→ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$t \mapsto f(x,t)$ est continue (comme quotient de fonctions continues, avec $1+t^2 \neq 0$ pour tout t) donc continue par morceaux.

→ De plus $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable (1a).

$t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est également continue par morceaux. Justifions l'intégrabilité :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t}{1+t^2}e^{-xt} \xrightarrow[t \to 0_+]{} 0$. D'où l'intégrabilité en 0.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\dfrac{t}{t^2}e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} -\dfrac{e^{-xt}}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. En effet,

  $te^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée. Ainsi,

  $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable en $+\infty$ par comparaison.

  Ainsi $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

→ Enfin, $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètres, $\boxed{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)}$.

et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,dt$

1)c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par (1b), on a :

$$f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-tx}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \cancelto{1}{\frac{1+t^2}{1+t^2}} e^{-tx}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} \quad \text{car } x>0.$$

Ainsi f est solution de :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) + f''(x) = \frac{1}{x}}$$

2)a) Montrons la bonne définition de g sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $A>0$, et $x \in \mathbb{R}_+$. Par intégration par parties :

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t+x}\,dt = \left[-\cos(t)\frac{1}{t+x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{x} - \underbrace{\frac{\cos(A)}{A+x}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0} - \int_0^A \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}\,dt$$

Or, $\varphi : t \mapsto \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}$ est intégrable. En effet $\frac{\cos(t)}{(t+x)^2} = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et continue sur $[0,1]$. Donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}\,dt$ converge.

Donc $\int_0^A \frac{\sin(t)}{t+x}\,dt \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}\,dt$ et ainsi

$\boxed{g(x) \text{ existe, pour tout } x \in \mathbb{R}_+}$.

2)b) Montrons que $g \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$.

On ne peut pas utiliser le théorème $\mathcal{C}^2$!

Pour $x \geqslant 0$,

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin((t+x)-x)}{t+x}\,dt$$

$$= \cos(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t+x)}{t+x}\,dt - \sin(x) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t+x)}{t+x}\,dt$$

$$= \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,du$$

$$g(x) = \cos(x)\, S(x) - \sin(x)\, C(x)$$

Or, cos et sin sont $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. S et C sont donc également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, $\boxed{g \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ donc } \mathcal{C}^2}$.

2c) Pour $x \geqslant 0$, g étant $\mathcal{C}^2$,

$$g'(x) = -\sin(x) S(x) + \cos(x) S'(x) - \cos(x) C(x) - \sin(x) C'(x)$$

$$= -\sin(x) S(x) + \cancel{\cos(x)\left(-\frac{\sin(x)}{x}\right)} - \cos(x) C(x) \cancel{- \sin(x)\left(-\frac{\cos(x)}{x}\right)}$$

et $$g''(x) = -\cos(x) S(x) - \sin(x) S'(x) + \sin(x) C(x) - \cos(x) C'(x)$$

$$= -\sin(x) C(x) - \cos(x) S(x) + \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{x}$$

$$= -g(x) + \frac{1}{x}$$

Ainsi $\boxed{g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}}$

3). D'après 1c et 2c, $(f-g)'' + (f-g) = 0$.

Ainsi, $f-g$ est 2π-périodique.

Étudions les limites en $+\infty$ de f et g.

$\triangleleft$ Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

De plus $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, à $x \in \mathbb{R}_+$ fixé ; et $t \mapsto 0$ également.

Pour $x \in [a,+\infty[$ avec $a \geq 0$, $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(x,t)| \leq \varphi_a(t) = \frac{e^{-at}}{1+t^2}$$

qui est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme vu en 1a.

Ainsi, par théorème de convergence dominée,

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$$

▵ $g(0) = \cos(0)\, S(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ existe par 2a.

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) C\left(\frac{\pi}{2}\right) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ existe de même.

Ainsi, $\begin{cases} S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ C(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$ comme restes d'intégrales convergentes.

Donc, cos et sin étant bornées, par l'expression de 2b,

$$g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

▵ Finalement $f-g$ est 2π-périodique et tend vers 0 en $+\infty$.

On en déduit que $\boxed{f-g = 0 \text{ sur }]0,+\infty[}$

4) Soit $x>0$.

Par 2b, $g(x) = \cos(x)\, S(x) + \sin(x)\, C(x)$

▵ S est continue en 0 : $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{u}$ est

prolongeable par continuité en 0. Ainsi S est continue en 0

comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_-$.

▵ $\lim\limits_{x\to 0} C(x)$: $\dfrac{\cos(u)}{u} \underset{u\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{u} \geq 0$. De plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u}\,du$ diverge.

Par théorème de sommation des intégrales partielles,

$$\int_x^1 \frac{\cos(u)}{u}\,du \underset{x\to 0_+}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{u}\,du = -\ln x$$

Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,du = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,du}_{\text{existe car } \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} \text{ existe}} - \ln(x) + o_{x\to 0_+}(\ln x)$

et $u \mapsto \frac{\cos(u)}{u}$ est continue sur $[1, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,du = -\ln(x) + o_{x\to 0_+}(\ln x)$$

Ainsi, $C(x) \underset{x\to 0_+}{\sim} -\ln(x)$, et $\sin(x)C(x) \underset{x\to 0_+}{\sim} -x\ln(x)$.

4 Finalement $g(x) \xrightarrow[x\to 0_+]{} \cos(0)S(0) + 0$ car $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0$.

Donc $g(x) \xrightarrow[x\to 0_+]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\boxed{g \text{ est continue en } 0}$.

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \lim_{\substack{x\to 0_+\\ x\neq 0}} g(x)$ par (4)

$= \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0_+\\ x\neq 0}} f(x)$ par (3), car $f = g$ sur $]0, +\infty[$

$= f(0)$ car f est continue en 0 par (1b).

$= \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\operatorname{Arctan}(t)]_0^{+\infty}$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}}$$

Problème 2.

PARTIE I.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

· Homogénéité : toujours vérifiée. Si $x \in \mathbb{C}^d$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$\|A(\lambda x)\|_\infty = \|\lambda(Ax)\|_\infty = |\lambda|\,\|Ax\|_\infty$ car $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

· Inégalité triangulaire : de même, Si $x, y \in \mathbb{C}^d$,

$\|A(x+y)\|_\infty = \|Ax+Ay\|_\infty \leqslant \|Ax\|_\infty + \|Ay\|_\infty$ par IT sur $\|\cdot\|_\infty$

- Séparation :
  - Si A est inversible. Soit $x \in \mathbb{C}^d$ tel que $\|Ax\|_\infty = 0$. Alors $Ax = 0_{\mathbb{C}^d}$ et comme $A \in GL_d(\mathbb{C})$, $x = 0$. Ainsi $x \mapsto \|Ax\|_\infty$ est une norme.
  - Si A n'est pas inversible, soit $x \in \ker A \setminus \{0_{\mathbb{C}^d}\}$. Alors $x \neq 0$ et $Ax = 0$. Donc $\|Ax\|_\infty = 0$ mais $x \neq 0$. Ce n'est pas une norme.

Finalement $\boxed{x \mapsto \|Ax\|_\infty \text{ est une norme sur } \mathbb{C}^d \text{ si et seulement si } A \in GL_d(\mathbb{R})}$

2) a) Norme :

- Homogénéité : Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors,

$$|||\lambda A||| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(\lambda A x)\|_\infty$$

$$= \sup_{\|x\| \leqslant 1} (|\lambda| \cdot \|Ax\|_\infty)$$ par homogénéité de $x \mapsto \|Ax\|_\infty$ (toujours vérifiée même si $A \notin GL_d(\mathbb{C})$).

$$= |\lambda| \cdot \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|_\infty$$

$$|||\lambda A||| = |\lambda| \cdot |||A|||$$

- Inégalité triangulaire : Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

$$|||A+B||| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax+Bx\|_\infty$$

Or pour tout $x \in \mathbb{C}^d$, $\|x\| \leqslant 1$, par inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|Ax+Bx\|_\infty \leqslant \|Ax\|_\infty + \|Bx\|_\infty$$

Ainsi en passant à la borne supérieure,

$$|||A+B||| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \Big(\underbrace{\|Ax\|_\infty}_{\geqslant 0} + \underbrace{\|Bx\|_\infty}_{\geqslant 0} \Big)$$

$$= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_\infty + \sup_{\|x\|\leq 1} \|Bx\|_\infty = |||A||| + |||B|||$$

Finalement $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$.

- Séparation : Supposons que $|||A||| = 0$ pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

  Alors par définition, pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{C}^d$, $\|\tilde{x}\| \leq 1$,
$$0 \leq \|A\tilde{x}\|_\infty \leq 0$$
  Donc pour tout $\|\tilde{x}\| \leq 1$, $A\tilde{x} = 0_{\mathbb{C}^d}$

  Soit $x \in \mathbb{C}^d$. Alors $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1 et donc
$$A\frac{x}{\|x\|} = 0 \text{ et ainsi } Ax = 0$$
  Donc $\mathbb{C}^d \subseteq \operatorname{Ker} A \subseteq \mathbb{C}^d$; $\operatorname{Ker} A = \mathbb{C}^d$ et $A = 0$.

$\boxed{|||\cdot||| \text{ est donc une norme}}$

- Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, On prend $A \neq 0$ (sinon c'est trivial)

  De plus $\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{C}^d, \|x\| \leq 1\}$ est un compact de $\mathbb{C}^d$.

  L'application $x \mapsto \|Ax\|_\infty$ est continue car lipschitzienne :

  pour $(x,y) \in (\mathbb{C}^d)^2$,
$$\|A(x-y)\|_\infty \leq |||A|||\cdot\|x-y\| \text{ par définition de } |||A||| \text{ car } \left\|\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\| \leq 1$$
$$\leq k\|x-y\|$$
  avec $k = |||A||| > 0$ (car $A \neq 0$).

  Ainsi $x \mapsto \|Ax\|_\infty$ est continue sur $\overline{B}(0,1)$ compacte donc l'application est bornée et atteint ses bornes.

  Il existe donc $\boxed{x_0 \in \mathbb{C}^d \text{ tel que } |||A||| = \|Ax_0\|_\infty}$

2b) Soit $x_0 \in \mathbb{C}^d$, $\|x_0\|_\infty \leq 1$, tel que $|||AB||| = \|ABx_0\|_\infty$
$$\|ABx_0\|_\infty = \|A(Bx_0)\|_\infty$$

$$\leq |||A||| \cdot \|Bx_0\|_\infty \quad \text{car} \quad \left\| \frac{Bx_0}{\|Bx_0\|_\infty} \right\|_\infty \leq 1$$

$$\|ABx_0\|_\infty \leq |||A||| \cdot |||B||| \quad \text{car} \quad \|x_0\|_\infty \leq 1$$

Soit $\boxed{|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||}$

3) ▵ Soit $x \in \mathbb{C}^d$, tel que $\|Ax\|_\infty = |||A|||$, avec $\|x\|_\infty \leq 1$.

$$|||A||| = \|Ax\|_\infty$$

$$= \max_{1 \leq i \leq d} \left| \sum_{k=1}^{d} a_{ik} x_k \right|$$

$$|||A||| = \left| \sum_{k=1}^{d} a_{i_0 k} x_k \right| \quad \text{pour un certain } i_0 \in [\![1,d]\!].$$

Or, $\|x\|_\infty \leq 1$ donc pour tout $k \in [\![1,d]\!]$, $|x_k| \leq 1$

$$|||A||| \overset{IT}{\leq} \sum_{k=1}^{d} |a_{i_0 k}| = \|L_{i_0 k}\|_1 \leq \max_{1 \leq i \leq d} \|L_i\|_1$$

▵ Pour montrer l'égalité, on va trouver un $x \in \mathbb{C}^d$ qui réalise $\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} \|L_i\|_1$.

Soit $k_0 \in [\![1,d]\!]$ tel que $\|L_{k_0}\|_1 = \max_{1 \leq i \leq d} \|L_i\|_1$.

Pour $i \in [\![1,d]\!]$, posons :

$$x_j = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{k_0 j}}}{|a_{k_0 j}|} & \text{si } a_{k_0 j} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$. Alors $\|x\|_\infty = 1$ et

$$|||A||| \geq \|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq d} \left| \sum_{k=1}^{d} a_{ij} x_j \right| = \max_{1 \leq j \leq d} \left| \sum_{k=1}^{d} \frac{a_{ij} \overline{a_{k_0 j}}}{|a_{k_0 j}|} \right|$$

$$|||A||| \geq \left| \sum_{k=1}^{d} \frac{a_{k_0 j} \overline{a_{k_0 j}}}{|a_{k_0 j}|} \right| = \left| \sum_{k=1}^{d} |a_{k_0 j}| \right| = \|L_{k_0}\|_1$$

▵ Ainsi $\boxed{|||A||| = \max_{1 \leq i \leq d} \|L_i\|_1}$

4a) Par formule de changement de base,

$$M' = P^{-1} M P$$

où $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha_1 e_1, \dots, \alpha_d e_d)$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_d \end{pmatrix}. \quad \text{Ainsi } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{\alpha_d} \end{pmatrix}$$

Précisons que nécessairement $\alpha_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, car sinon $(\alpha_1 e_1, \dots, \alpha_d e_d) = \mathcal{B}'$ ne serait pas libre.

Ainsi $m_{ij}' = \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} [P^{-1}]_{ik} m_{kl} [P]_{lj} = \frac{1}{\alpha_i} m_{ij} \alpha_j$

$$\boxed{m_{ij}' = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} m_{ij}} \quad \text{pour } (i,j) \in [\![1,d]\!]^2.$$

4b) Soit $\varepsilon > 0$. Posons pour $i \in [\![1,d]\!]$, $\boxed{\alpha_i = \frac{\varepsilon}{2^i |||M|||}}$

Alors pour $j > i$, $|m_{ij}'| = \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|} |m_{ij}|$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-i}}_{<1 \text{ car } j-i>0} \frac{|m_{ij}|}{|||M|||} \varepsilon$$

$$|m_{ij}'| < \frac{|m_{ij}|}{|||M|||} \varepsilon$$

De plus $|m_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{d} |m_{ik}| = \|L_i\|_1 \leq |||M|||$ par Q3.

Donc $\frac{|m_{ij}|}{|||M|||} \leq 1$ et $\boxed{|m_{ij}'| < \varepsilon}$

5) Soit $\varepsilon > 0$.

Introduisons une nouvelle norme $|||\cdot|||_\infty$ définie par

$$|||\cdot|||_\infty : \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (m_{ij})_{1\leq i,j\leq d} \longmapsto \max\limits_{1\leq i,j\leq d} |m_{ij}| \end{cases}$$

On montre aisément que c'est une norme.

Les normes $|||\cdot|||_\infty$ et $|||\cdot|||$ sont équivalentes (en dimension finie)

donc on trouve $\beta>0$ tel que pour $M\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$,

$$|||M||| \leq \beta |||M|||_\infty$$

◁ Avec les notations précédentes, prenons maintenant

$$Q = \mathrm{diag}\left(\frac{\beta}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta}{\alpha_d}\right)$$
$$= \mathrm{diag}\left(\frac{2|||T|||\beta}{\varepsilon}, \dots, \frac{2^d|||T|||\beta}{\varepsilon}\right)$$

Q est inversible car c'est une matrice de passage. Posons :

$$\boxed{\|\cdot\|' : \begin{cases} \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \|Qx\|_\infty \end{cases}}$$

Par Q1, $\boxed{\text{c'est une norme}}$.

◁ Remarquons que

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|'}{\|x\|'} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|QTx\|_\infty}{\|Qx\|_\infty}$$
$$= \sup_{x\neq 0}\frac{\|QTQ^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \quad \text{car } x\mapsto Qx \text{ est bijective}$$
$$= |||QTQ^{-1}||| = |||T'|||$$

Mais $T'=QTQ^{-1}$ est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à T dans la base $\mathcal{B}'=\left(\frac{\alpha_1}{\beta}e_1, \dots, \frac{\alpha_d}{\beta}e_d\right)$ où $(e_1, \dots, e_d)$ est la base canonique.

Donc, en notant $T' = (t'_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$, on a :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,d]\!],\ t'_{ii} = t_{ii} \text{ et } Sp(T) = \{t_{ii},\ i\in [\![1,d]\!]\} \\ \forall i \in [\![1,d]\!],\ \forall j>i,\ |t'_{ij}| < \frac{\varepsilon}{\beta} \end{cases}$$

◁ Montrons que $|||T'||| \leq \sigma(T) + \varepsilon$

Écrivons que $T' = D' + N'$ où $D' = \text{diag}(t_{11}, \dots, t_{dd})$.

Par inégalité triangulaire,

$$|||T'||| \leq |||D'||| + |||N'|||$$

Or, $|||D'||| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \|(0 \cdots 0\ t_{ii}\ 0 \cdots 0)\|_1$ par Q3

$$= \max_{1\leq i\leq n} |t_{ii}| = \sigma(T)$$

De plus $|||N'||| \leq \beta |||N'|||_\infty = \beta \max\limits_{j>i} |t'_{ij}|$

$$< \beta \cdot \frac{\varepsilon}{\beta} = \varepsilon$$

Finalement,

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|'}{\|x\|'} = |||T'||| \leq \sigma(T) + \varepsilon$$

Ce qui amène :

$$\boxed{\forall x\in \mathbb{C}^d\setminus\{0\},\ \|Tx\|' \leq (\sigma(T)+\varepsilon)\|x\|'}$$

6a) Soit $\varepsilon > 0$. D'après Q5, on trouve une norme $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{C}^d$ telle que pour $x \in \mathbb{C}^d$, $\|Tx\|' \leq (\sigma(T)+\varepsilon)\|x\|'$, ou plutôt

$$|||QTQ^{-1}||| \leq \sigma(T) + \varepsilon \qquad (*)$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $|||T^n||| = |||Q^{-1}(\underbrace{QTQ^{-1}}_{=T'})^n Q|||$

$$\leq |||Q^{-1}||| \cdot |||Q||| \cdot |||QTQ^{-1}|||^n$$

$$\boxed{|||T^n||| \leq \underbrace{|||Q^{-1}||| \cdot |||Q|||}_{=C>0} \cdot (\sigma(T)+\varepsilon)^n} \text{ par } (*)$$

6b) • Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $C > 0$, par Q6a,

$$|||T^n|||^{1/n} \leq C^{1/n}(\sigma(T)+\varepsilon)$$

Or $C^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln C\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, $C^{1/n} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\underbrace{\sigma(T)+\varepsilon}_{>0}}$

$$|||T^n|||^{\frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma(T)+\varepsilon}\right)(\sigma(T)+\varepsilon) = \sigma(T) + 2\varepsilon$$

• Lemme : $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}),\ \forall n \in \mathbb{N},\ |||A^n||| \geq \sigma(A)^n$

• Soit $\lambda \in Sp(A)$ tel que $|\lambda| = \sigma(A)$. Alors, si $x_0 \in E_\lambda(A)$, $Ax_0 = \lambda x_0$. Quitte à considérer $\frac{x_0}{\|x_0\|_\infty}$, prenons $\|x_0\|_\infty = 1$.
On a enfin $A^n x_0 = \lambda^n x_0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|||A^n||| \geq \|A^n x_0\|_\infty = |\lambda|^n \|x_0\|_\infty = \sigma(A)^n$$

Ainsi $\quad \sigma(T) \leq |||T^n|||^{\frac{1}{n}} \leq \sigma(T) + 2\varepsilon$ pour $n \geq N$.

C'est dire que $\boxed{|||T^n|||^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma(T)}$.

6c) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. A est trigonalisable donc on dispose de $Q \in GL_d(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure, telles que

$$A = QTQ^{-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|||A^n|||^{1/n} = |||QT^nQ^{-1}|||^{1/n} \leq \underbrace{|||Q|||^{1/n} \cdot |||T^n|||^{1/n} \cdot |||Q^{-1}|||^{1/n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma(T)}$$

De plus, par le lemme, $|||A^n|||^{\frac{1}{n}} \geq \sigma(A)$.
Comme $\sigma(T) = \sigma(A)$ (en effet $Sp(A) = Sp(T)$), on a par théorème d'encadrement

$$\boxed{|||A^n|||^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma(A)}$$

6d) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

- Supposons que $\sigma(A) \neq 0$. Par Q6c,

$$|||A^n||| \underset{n\to+\infty}{\sim} \sigma(A)^n$$

Ainsi, $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |||A^n||| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\iff \sigma(A)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\boxed{A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \sigma(A) = |\sigma(A)| < 1}$$

- Si $\sigma(A) = 0$, $Sp(A) = \{0\}$ donc A est nilpotente. Ainsi la suite (A^n) est stationnaire sur $0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})}$, et tend vers 0.

PARTIE 2.

7) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix}$ la matrice compagnon associée à P.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \\ a_0 u_n + \cdots + a_{d-1} u_{n+d-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \\ u_{n+d} - b \end{pmatrix}$$

Ainsi avec $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^d$, $\boxed{AU_n + B = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+d} \end{pmatrix} = U_{n+1}}$

8) Montrons que $\chi_A = P$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & X & -1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{d-2} & X - a_{d-1} \end{vmatrix}$$

En développant selon L_d,

$$= \sum_{i=0}^{d-2} (-a_i) (-1)^{i+1+d} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{XXXXXX}}^{i} & \overbrace{\hphantom{XXXXXX}}^{d-1-i} \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} \begin{matrix} X & -1 & \\ & \ddots & -1 \\ & & X \end{matrix} & (0) \\ (0) & \begin{matrix} -1 & & \\ X & \ddots & \\ & X & -1 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$+ (X - a_{d-1})(-1)^{d+d} \underbrace{\begin{vmatrix} X & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & X \end{vmatrix}}_{d-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{d-2} (-1)^{i+1+d+1+(d-1)-i} X^i a_i + (X - a_{d-1}) X^{d-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{d-2} a_i X^i + X^d - a_{d-1} X^{d-1} = P(X)$$

Ainsi $\boxed{\chi_A = P}$

9) On a pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Par une récurrence immédiate, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A^n U_0$.

$P \in \mathbb{C}[X]$ et $\chi_A = P$ donc A est trigonalisable et

$$\sigma(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda| = \max_{\lambda \text{ racine de } P} |\lambda| < 1 \text{ par hypothèse}$$

Donc par Q6d, $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi vu (α), $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

En particulier $[U_n]_1 = \boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

10) Si $\lambda \in Sp(A)$, $|\lambda| < 1$ donc $1 \notin Sp(A)$. Ainsi $I_d - A \in GL_d(\mathbb{C})$.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - (I_d - A)^{-1} B = U_n - R$

- Remarquons que
$$\begin{aligned} V_{n+1} &= AU_n + B - R \\ &= A(V_n + R) + B - R \\ &= AV_n + (\underbrace{(A - I_d)R}_{= -B} + B) \\ V_{n+1} &= AV_n \end{aligned}$$

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n(U_0 - R)$. Comme $A^n \to 0$, $V_n \to 0$. Or $U_n = V_n + R$ donc $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} R = (I_d - A)^{-1} B$.

- Ainsi $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ car $u_n = [U_n]_1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Notons $\ell = \lim u_n$.

- Comme pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i} + b$, par passage à la limite,
$$\ell = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \ell + b \iff P(1)\ell = b.$$ Or $P(1) \neq 0$ donc

$$\boxed{\ell = \frac{b}{1 - \sum_{i=0}^{d-1} a_i} = \frac{b}{P(1)}}$$

PARTIE 3.

11) ▷ D'après la relation de récurrence fournie par l'énoncé, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ b_0(n) & \cdots & \cdots & b_{d-1}(n) \end{pmatrix}}_{= B_n} V_n \quad (*)$$

Alors, comme pour $i \in [\![0, d-1]\!]$, $b_i(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_i$, on a :

$$B_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix} = A$$

Ainsi, $(*)$ amène :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \geq 0, \quad V_{n+q} = B_{n+q} \cdots B_n V_n$$

▷ Soit $\varepsilon > 0$. On sait par Q6c que $|||A^q|||^{\frac{1}{q}} \xrightarrow[q \to +\infty]{} \sigma(A)$.

Donc on dispose de $q \geq 1$ tel que $|||A^q|||^{1/q} \leq \sigma(A) + \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi pour ce $q \geq 1$, $|||A^q||| \leq (\sigma(A) + \frac{\varepsilon}{2})^q$. $(\star)$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$.

Donc, $\|V_{n+q}\|_\infty \leq |||\underbrace{B_{n+q} \cdots B_n}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} A^q}||| \cdot \|V_n\|_\infty \quad (**)$

Par continuité de la norme, $|||B_{n+q} \cdots B_n||| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |||A^q|||$.

On dispose donc de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
|||B_{n+q} \cdots B_n||| &\leq |||A^q||| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq (\sigma(A) + \tfrac{\varepsilon}{2})^q + \tfrac{\varepsilon}{2} && \text{par } (\star) \\
&\leq (\sigma(A) + \tfrac{\varepsilon}{2})^q + (\tfrac{\varepsilon}{2})^q && \text{car } \sigma(A) \geq 0 \text{ et } \tfrac{\varepsilon}{2} \geq 0 \\
&\leq (\sigma(A) + \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2})^q && \text{car } q \geq 1 \\
|||B_{n+q} \cdots B_n||| &\leq (\sigma(A) + \varepsilon)^q
\end{aligned}$$

Donc, par $(\ast\ast)$,

$$\boxed{\forall \varepsilon>0,\ \exists q\geq 1,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ \|V_{n+q}\|_\infty \leq (\sigma(A)+\varepsilon)^q\|V_n\|_\infty}$$

12) On sait que $\sigma(A)<1$ par hypothèse. Soit donc $\varepsilon>0$ tel que $\sigma(A)+\varepsilon<1$ (par exemple $\varepsilon=\frac{1-\sigma(A)}{2}>0$).

Pour ce ε, on trouve q et n_0 deux entiers tels que

$$\forall n\geq n_0,\ \|V_{n+q}\|_\infty \leq (\sigma(A)+\varepsilon)^q\|V_n\|_\infty$$

$$\|V_{n+q}\|_\infty < \|V_n\|_\infty$$

Une récurrence rapide amène que si $n=mq+r$ est la division euclidienne de n par q, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\|V_n\|_\infty < \|V_{n-mq}\|_\infty = \|V_r\|_\infty$$

Or $r\in[\![0,q-1]\!]$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\|V_n\|_\infty \leq \max(\|V_0\|_\infty,\dots,\|V_{q-1}\|_\infty)$$

Ainsi $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{C}^d)^{\mathbb{N}}$ est bornée.

Soit $\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ telle que $(V_{\varphi(n)})$ converge ; une telle extractrice existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Montrons que

$$V_{\varphi(n)} \longrightarrow 0_{\mathbb{C}^d}.$$

Notons $V_\varphi = \lim\limits_{n\to+\infty} V_{\varphi(n)}$

Pour $n\geq n_0$, $\varphi(n)\geq\varphi(n_0)\geq n_0$ donc

$$\underbrace{\|V_{\varphi(n)+q}\|_\infty}_{\to \|V_\varphi\|_\infty} \leq (\sigma(A)+\varepsilon)^q \underbrace{\|V_{\varphi(n)}\|_\infty}_{\to \|V_\varphi\|_\infty}$$

Ainsi, $\|V_\varphi\|_\infty \leq (\sigma(A)+\varepsilon)^q\|V_\varphi\|_\infty$. Par l'absurde, si $V_\varphi\neq 0$, $\|V_\varphi\|_\infty\neq 0$ donc $1\leq(\sigma(A)+\varepsilon)^q<1$, impossible.

Donc $V_\varphi=0$.

Ceci étant vrai pour toute extractrice φ, on a montré que la suite (V_n) admettait une unique valeur d'adhérence qui est $0_{\mathbb{C}^d}$. Donc, $V_n \longrightarrow 0$.

On en conclut que $\boxed{v_n \longrightarrow 0}$.

* * *